

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
ТАДЖИКИСТАН  
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»  
«28» августа 2023 г.  
Заведующий кафедрой  
математики и физики



Гаибов Д.С.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по учебной дисциплине

**«Интегральные уравнения и теория операторов»**  
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»  
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»  
Форма подготовки - очная  
Уровень подготовки - магистратура

**ПАСПОРТ  
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции *	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства
					Вид
1.	Введение	ПК-1	ИПК-1.1. Знает современные проблемы математики; современное состояние исследуемой проблемы; методы проведения исследований в области математики	8	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Гильбертово пространство	ПК-1	ИПК-1.2. Умеет видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения.	8	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Линейные операторы в гильбертовом пространстве	ПК-1	ИПК-1.3. Владеет - способностью к интенсивной научно-исследовательской работе; адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы.	8	Перечень вопросов для устного опроса
4.	Спектр операторов	ПК-1	ИПК-1.1. Знает современные проблемы математики; современное состояние исследуемой проблемы; методы проведения	8	Перечень вопросов для устного опроса

			исследований в области математики		
5.	Интегральные уравнения	ПК-1	ИПК-1.2. Умеет видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения.	8	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Понятие функционала, теорема Рисса	ПК-1	ИПК-1.3. Владеет - способностью к интенсивной научно-исследовательской работе; адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы.	8	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				48	

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА**  
по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

1.  $\delta$  - функция Дирака, определения и свойства.
2. Производные от  $\delta$  - функции.
3. Функции Чебышева-Эрмита. Функции Лагерра.
4. Базис, размерность пространства. Евклидовы пространства, свойства скалярного произведения, норма, ортонормированный базис.
5. Гильбертово пространство и его размерность. Понятие кет - и бра-векторов.
6. Оснащенное гильбертово пространство, критерий для дополнительных векторов, непрерывный базис.
7. Понятие оператора, абстрактные операторы и их представители. Линейные операторы.
8. Алгебраические операции с операторами: равенство, сложение, умножение, возведение в степень.
9. Обратный оператор, особенные и неособенные операторы и их свойства.
10. Функция от операторов.
11. Представление операторов, матричный элемент, интегральный оператор, ядро и его свойства.
12. Сопряженные операторы и их свойства. Нахождение сопряженных операторов.
13. Эрмитовы операторы и их свойства.

14. Унитарные операторы и их свойства. Унитарное преобразование.
15. Определение собственных векторов и собственных значений, вырождение. Спектр оператора.
16. Собственные вектора и собственные значения эрмитовых операторов. Дискретные и непрерывные спектры.
17. Интегральные уравнения: основные определения, классификация.
18. Интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода.
19. Задача Штурма-Лиувилля.
20. Интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода.
21. Понятие функционала и его вариации
22. Линейные функционалы, теорема Рисса.

### **Критерии оценки:**

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

**ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА**  
по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

1.

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Фредгольма?

- A)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$
- B)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy + f(x)$
- C)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$
- D)  $u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$

2.

Какой метод используется для решения интегральных уравнений, если известна форма ядра?

- A) Метод Рунге-Кутты
- B) Метод итераций
- C) Метод конечных разностей
- D) Метод Гаусса

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Волтерра?

- A)  $u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy$
- B)  $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y) dy$
- C)  $u(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$
- D)  $u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy + g(x)$

3.

Какое из следующих свойств является характерным для гильбертового пространства?

- A) Наличие только одной нормы
- B) Полнота относительно заданной метрики
- C) Непрерывность всех линейных операторов
- D) Наличие только конечномерных подпространств

4.

Какой из следующих элементов является базисом в гильбертовом пространстве?

- A) Конечное множество векторов
- B) Линейная комбинация векторов
- C) Ортонормированный набор векторов
- D) Набор из двух векторов

5.

Как называется скалярное произведение в гильбертовом пространстве?

- A) Норма
- B) Мера
- C) Операция
- D) Интеграл

6.

Какой из следующих операторов является линейным?

- A)  $T(f + g) = Tf + Tg$
- B)  $T(cf) = cTf$
- C)  $T(f) = f^2$
- D) Все вышеперечисленные

7.

Какой из следующих операторов является ограниченным?

- A) Оператор, который не сохраняет нормы
- B) Оператор, для которого существует константа  $C$ , такая что  $\|Tf\| \leq C\|f\|$
- C) Оператор, который не имеет собственных значений
- D) Оператор, который является неограниченным

8.

Какое из следующих свойств не относится к компактным операторам в гильбертовом пространстве?

- A) Сохраняют ограниченность
- B) Приводят ограниченные множества к предкомпактным
- C) Имеют собственные значения, стремящиеся к нулю
- D) Являются непрерывными

9.

Какой из следующих типов спектра относится к оператору?

- A) Дискретный спектр
- B) Непрерывный спектр
- C) Смешанный спектр
- D) Все вышеперечисленные

10.

Какой из следующих операторов может иметь пустой спектр?

- A) Компактный оператор
- B) Непрерывный оператор
- C) Невырожденный оператор
- D) Никакой из вышеперечисленных

11.

Какое из следующих утверждений о спектре операторов является верным?

- A) Спектр всегда конечен
- B) Спектр может быть пустым
- C) Спектр всегда состоит из собственных значений
- D) Спектр всегда включает 0

12.

Какой из следующих типов интегральных уравнений используется для моделирования физических процессов?

- A) Интегральные уравнения Фредгольма
- B) Интегральные уравнения Вольтерра
- C) Линейные интегральные уравнения
- D) Все вышеперечисленные

13.

Какое ядро называется симметричным в интегральном уравнении?

- A)  $K(x, y) = K(y, x)$
- B)  $K(x, y) = -K(y, x)$
- C)  $K(x, y) = K(x, y)$
- D)  $K(x, y) = 0$

14.

Какой метод используется для численного решения интегральных уравнений?

- A) Метод Монте-Карло
- B) Метод конечных элементов
- C) Метод итераций
- D) Все вышеперечисленные

15.

Какое из следующих определений является правильным для линейного функционала?

- A)  $L(x + y) = L(x) + L(y)$
- B)  $L(cx) = cL(x)$
- C)  $L(x)$  может быть представлено в виде скалярного произведения
- D) Все вышеперечисленные

16.

Какое из следующих утверждений является следствием теоремы Рисса?

- A) Существование непрерывного линейного функционала на замкнутом подмножестве
- B) Существование компактного оператора
- C) Существование собственных значений
- D) Существование базиса в пространстве

17.

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Фредгольма?

- A)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$
- B)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy + f(x)$
- C)  $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$
- D)  $u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$

18.

Какое из следующих свойств является характерным для гильбертового пространства?

- A) Наличие только одной нормы
- B) Полнота относительно заданной метрики
- C) Непрерывность всех линейных операторов
- D) Наличие только конечномерных подпространств

19.

Какой из следующих функционалов является непрерывным?

- A)  $L(x) = \|x\|^2$
- B)  $L(x) = x^2$
- C)  $L(x) = \langle x, y \rangle$
- D)  $L(x) = \frac{1}{x}$

20.

Какой из следующих операторов является линейным?

- A)  $T(f + g) = Tf + Tg$
- B)  $T(cf) = cTf$
- C)  $T(f) = f^2$
- D) Все вышеперечисленные

21.

Какой из следующих типов спектра относится к оператору?

- A) Дискретный спектр
- B) Непрерывный спектр
- C) Смешанный спектр
- D) Все вышеперечисленные

22.

Какое из следующих определений является правильным для линейного функционала?

- A)  $L(x + y) = L(x) + L(y)$
- B)  $L(cx) = cL(x)$
- C)  $L(x)$  может быть представлено в виде скалярного произведения
- D) Все вышеперечисленные

23.

Какой из следующих типов интегральных уравнений используется для моделирования физических процессов?

- A) Интегральные уравнения Фредгольма
- B) Интегральные уравнения Волтерра
- C) Линейные интегральные уравнения
- D) Все вышеперечисленные

24.

Какое ядро называется симметричным в интегральном уравнении?

- A)  $K(x, y) = K(y, x)$
- B)  $K(x, y) = -K(y, x)$
- C)  $K(x, y) = K(x, y)$
- D)  $K(x, y) = 0$

### **Критерии оценки:**

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

## **ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И НА СООТВЕТСТВИЕ** по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

### **Задания открытого типа:**

1.

Опишите классификацию интегральных уравнений. Включите в ответ определения уравнений Фредгольма и Волтерра, а также приведите примеры методов их решения.

2.

Что такое гильбертово пространство? Перечислите его основные свойства и приведите примеры.

3.

Определите, что такое линейный оператор в гильбертовом пространстве. Приведите примеры линейных операторов и обсудите их свойства.

4.

Опишите понятие спектра линейного оператора. Каковы основные виды спектра и их характеристики?

5.

Каковы основные методы решения интегральных уравнений? Приведите примеры и объясните их применение.

6.

Что такое линейный функционал? Объясните теорему Рисса и её значение в функциональном анализе.

7.

Опишите основные отличия между интегральными уравнениями Фредгольма и Волтерра. Приведите примеры для каждого типа уравнений и укажите, какие методы могут быть использованы для их решения.

8.

Что такое гильбертово пространство и какие его основные свойства? Приведите примеры гильбертовых пространств и объясните, как они применяются в функциональном анализе.

9.

Что такое спектр оператора в гильбертовом пространстве? Опишите основные виды спектра и их характеристики.

10.

Опишите свойства линейных операторов в гильбертовом пространстве. Какие условия необходимы для того, чтобы оператор считался ограниченным?

11.

Объясните, что такое интегральные уравнения и какие методы используются для их решения. Приведите примеры интегральных уравнений и их приложений.

12.

Что такое функционал и какова его роль в функциональном анализе? Объясните теорему Рисса и её значение.

### Задания на соответствие:

1.

Определение	Тип интегрального уравнения
1. Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком интеграла и зависит от независимой переменной	A. Уравнение Фредгольма
2. Уравнение, где известная функция добавляется к интегралу	B. Уравнение Волтерра
3. Уравнение, в котором ядро зависит от двух переменных	C. Линейное интегральное уравнение

2.

<b>Определение</b>	<b>Свойство гильбертового пространства</b>
1. Пространство, в котором определено скалярное произведение	A. Полнота
2. Набор векторов, который является ортонормированным	B. Ортонормированный базис
3. Пространство, в котором любые две функции могут быть представлены как линейные комбинации	C. Линейная структура
3.	

<b>Определение</b>	<b>Тип оператора</b>
1. Оператор, который сохраняет линейность и ограниченность	A. Линейный оператор
2. Оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные	B. Компактный оператор
3. Оператор, который не имеет собственных значений	C. Неограниченный оператор
4.	

<b>Определение</b>	<b>Тип спектра</b>
1. Множество всех собственных значений оператора	A. Дискретный спектр
2. Множество, включающее в себя все значения, которые могут быть получены из оператора	B. Непрерывный спектр
3. Спектр, который не содержит точек	C. Пустой спектр
5.	

<b>Определение</b>	<b>Тип интегрального уравнения</b>
1. Уравнение, где ядро симметрично по своим аргументам	A. Симметричное интегральное уравнение
2. Уравнение, в котором интегрируется произведение функции и ядра	B. Линейное интегральное уравнение
3. Уравнение, в котором присутствует функция, зависящая от одной переменной	C. Интегральное уравнение Фредгольма
6.	

<b>Определение</b>	<b>Свойство</b>
1. Отображение, которое сопоставляет каждому вектору скаляр	A. Линейный функционал
2. Утверждение о существовании непрерывного линейного функционала	B. Теорема Рисса
3. Отображение, которое не является линейным	C. Нелинейный функционал
<b>7.</b>	

<b>Определение</b>	<b>Термин</b>
1. Уравнение, в котором функция выражается через интеграл от своего значения.	A. Интегральное уравнение Фредгольма
2. Уравнение, в котором функция зависит от себя через интеграл.	B. Интегральное уравнение Волтерра
3. Метод, основанный на последовательном приближении решения.	C. Метод итераций
4. Уравнение, в котором ядро не зависит от одной из переменных.	D. Линейное интегральное уравнение
<b>8.</b>	

<b>Определение</b>	<b>Термин</b>
1. Пространство, в котором определено скалярное произведение.	A. Гильбертово пространство
2. Свойство, при котором каждая последовательность Коши сходится.	B. Полнота
3. Набор векторов, который является базисом в пространстве.	C. Ортонормированный базис
4. Пример пространства, состоящего из всех квадратируемых функций.	D. Пространство $L^2$
<b>9.</b>	

### Определение

1. Оператор, который сохраняет линейные комбинации.
2. Оператор, для которого существует константа  $C$ , такая что  $\|Tf\| \leq C\|f\|$ .
3. Оператор, который не имеет собственных значений.
4. Оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные.

### Термин

- A. Линейный оператор
- B. Ограниченный оператор
- C. Невырожденный оператор
- D. Компактный оператор

10.

### Определение

1. Набор собственных значений оператора.
2. Спектр, состоящий из дискретных значений.
3. Спектр, который включает в себя все значения, кроме нуля.
4. Спектр, который может быть пустым.

### Термин

- A. Спектр
- B. Дискретный спектр
- C. Непрерывный спектр
- D. Пустой спектр

11.

### Определение

1. Уравнение, в котором функция выражается через интеграл от других функций.
2. Ядро, которое симметрично по своим аргументам.
3. Метод, используемый для численного решения интегральных уравнений.
4. Уравнение, в котором интеграл зависит от фиксированной переменной.

### Термин

- A. Интегральное уравнение
- B. Симметричное ядро
- C. Метод конечных элементов
- D. Интегральное уравнение Вольтерра

12.

Определение	Термин
1. Отображение из векторного пространства в поле чисел.	A. Линейный функционал
2. Теорема, утверждающая существование непрерывного линейного функционала.	B. Теорема Рисса
3. Функционал, который сохраняет линейные комбинации.	C. Непрерывный функционал
4. Пространство, в котором определены все линейные функционалы.	D. Пространство двойственного функционала

### Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Составитель:  Курбанов И.

