

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
«28» августа 2024 г.
Заведующий кафедрой
математики и физики



Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине (модулю)

«Классическая дифференциальная геометрия»
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»
Форма подготовки - очная
Уровень подготовки - магистратура

Душанбе – 2024

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства Вид
1.	Плоские кривые	ПК-1	ИПК-1.1. Овладевает современными проблемами математики, анализирует текущее состояние исследуемой проблемы и применяет методы проведения исследований в области математики.	5	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Пространственные кривые	ПК-2	ИПК-2.1. Разбирается в сущности поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; применяет методы и приемы для решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; изучает основы педагогики и психологии; анализирует современные проблемы в этих областях.	6	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Общая локальная теория кривых	ПК-1	ИПК-1.2. Применяет методы проведения исследований в области	5	Перечень вопросов для устного опроса

			математики, осведомлён о современных проблемах математики; анализирует текущее состояние исследуемой проблемы;.		
4.	Основная теорема локальной теории кривых	ПК-2	ИПК-2.2. Способен формировать научный коллектив, который успешно решает поставленные задачи; устанавливать деловые отношения с коллегами; организовывать и координировать научно-исследовательские и научно-производственные работы..	6	Перечень вопросов для устного опроса
5.	Дополнительные теоремы теории плоских кривых	ПК-1	ИПК-1.3. Осваивает современные проблемы математики; анализирует текущее состояние исследуемой проблемы; применяет методы проведения исследований в области математики.	6	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Понятие поверхности	ПК-2	ИПК-2.3. Осуществляет полное владение информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	6	Перечень вопросов для устного опроса
7.	Многообразия	ПК-1	ИПК-1.1. Овладевает современными	6	Перечень вопросов для устного опроса

			проблемами математики, анализирует текущее состояние исследуемой проблемы и применяет методы проведения исследований в области математики.		
Всего:				40	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1. Плоские кривые.
2. Способы задания пространственных кривых
3. Кривые в n-мерном евклидовом пространстве
4. Основная теорема локальной теории кривых
5. Теорема Хопфа
6. Понятие поверхности
7. Способы задания поверхности
8. Понятие многообразия
9. Карты и атлас
10. Векторное и сопряженное пространства
11. Канонический изоморфизм
12. Дуальные базисы
13. Различные определения касательного вектора
14. Касательное пространство к многообразию в точке
15. Погружение, вложение, подмногообразие
16. Метрика
17. Риманово (псевдориманово) многообразие
18. Индуцированная метрика

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «хорошо», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «удовлетворительно», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «неудовлетворительно», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1.

Задача: Какое условие необходимо для того, чтобы две плоские кривые C_1 и C_2 касались друг друга в точке P ?

- А) Они должны пересекаться в точке P .
- В) У них должны совпадать производные в точке P .
- С) Они должны иметь одинаковую длину.
- D) Они должны быть параллельны.

2.

Задача: Найдите точку касания кривых $y = x^2$ и $y = 2x - 1$.

- А) $(0, 0)$
- В) $(1, 1)$
- С) $(1, 1)$ и $(0, 0)$
- D) Кривые не касаются.

3.

Задача: Для каких значений параметра a кривые $y = ax^2$ и $y = x + a$ касаются друг друга?

- A) $a = 0$
- B) $a = 1$
- C) $a = -1$
- D) $a = \frac{1}{2}$

4.

Задача: Найдите кривизну плоской кривой, заданной параметрически:

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.

Задача: Для какой из следующих кривых кривизна постоянна?

- a) $y = x^2$
- b) $y = \sin(x)$
- c) $y = x$
- d) $y = c$ (где c — константа)

6.

Задача: Какое из следующих утверждений о кривизне пространственной кривой верно?

- A) Кривизна всегда положительна.
- B) Кривизна может быть отрицательной.
- C) Кривизна равна нулю только для прямых.
- D) Все вышеуказанные утверждения верны.

7.

Задача: Как называется мера изменения направления касательной к кривой в пространстве?

- A) Кривизна
- B) Кручение
- C) Длина дуги
- D) Угловая скорость

8.

Задача: Если кривая задана параметрически уравнениями $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то формула для кривизны κ кривой равна:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Верно ли это утверждение?

- A) Верно
- B) Неверно

9.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, где I — некоторый интервал. Какой из следующих условий достаточен для того, чтобы γ была параметризована по длине?

- A) $\|\gamma'(t)\| = 1$ для всех $t \in I$.
- B) γ является дифференцируемой функцией.
- C) γ замкнута.

10.

Задача: Какое из следующих утверждений верно относительно кривой $\gamma(t)$, если $\gamma'(t) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$?

- A) Кривая в точке t_0 имеет точку перегиба.
- B) Кривая в точке t_0 имеет локальный экстремум.
- C) Кривая γ не может быть гладкой.

11.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то:

- A) Кривая замкнута.
- B) Кривая пересекает сама себя.
- C) Кривая является гладкой.

12.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, где I — интервал. Если $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$, то кривая γ является:

- A) Линейной
- B) Параметрической
- C) Регулярной
- D) Замкнутой

13.

Задача: Если кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\gamma''(t) = 0$ для некоторого $t \in I$, то кривая:

- A) Прямая
- B) Кривая с постоянной кривизной
- C) Кривая с постоянной скоростью
- D) Кривая с постоянным направлением

14.

Задача: Основная теорема локальной теории кривых утверждает, что в окрестности точки t_0 кривая $\gamma(t)$ может быть описана как:

- A) Линейная функция
- B) Полиномиальная функция
- C) Локальная параметризация
- D) Параметрическая кривая

15.

Задача: Какое из следующих утверждений о плоских кривых является верным?

- A) Все плоские кривые являются гладкими.
- B) Плоская кривая может иметь точки разрыва.
- C) Плоская кривая всегда замкнута.
- D) Все плоские кривые имеют одинаковую длину.

16.

Задача: Какое из следующих свойств не относится к кривизне плоской кривой?

- A) Кривизна может быть положительной или отрицательной.
- B) Кривизна всегда равна нулю для прямой линии.
- C) Кривизна плоской кривой всегда постоянна.
- D) Кривизна характеризует степень изменения направления касательной.

17.

Задача: Как называется теорема, утверждающая, что если плоская кривая имеет постоянную кривизну, то она является окружностью?

- A) Теорема о постоянной кривизне.
- B) Теорема Френе.
- C) Теорема о кривизне и радиусе.
- D) Теорема Бенедикта.

18.

Задача: Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, 2)$.

- A) $z = 2x + 2y - 2$
- B) $z = 2x + 2y - 1$
- C) $z = 2x + 2y + 1$
- D) $z = 2x + 2y + 2$

19.

Задача: Какова формула для нахождения уравнения касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) ?

- A) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
- B) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(y - y_0) + f_y(x_0, y_0)(x - x_0)$
- C) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y + y_0)$
- D) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x + x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

20.

Задача: Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \sin(x) + \cos(y)$ в точке $(0, 0, 1)$.

- A) $z = x + y + 1$
- B) $z = x + y$
- C) $z = -x + y + 1$
- D) $z = -x - y + 1$

21.

Задача: Какой из следующих объектов является 2-мерным многообразием?

- A) Прямая линия
- B) Круг
- C) Плоскость
- D) Точка

22.

Задача: Является ли множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ многообразием?

- A) Да
- B) Нет

23.

Задача: Какой из следующих объектов является гладким многообразием?

- A) Окружность в \mathbb{R}^2
- B) Множество всех точек, где функция $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ равна нулю
- C) Оба
- D) Ни один

24.

Задача: Какое из следующих утверждений о касательном пространстве в точке p многообразия M верно?

- A) Касательное пространство всегда является векторным пространством.
- B) Касательное пространство является подмножеством M .
- C) Касательное пространство содержит только одну точку p .
- D) Касательное пространство всегда имеет размерность 1.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И ЗАДАЧИ НА СООТВЕТСТВИЕ

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

Задачи открытого типа:

1.

Задача: Обоснуйте, как можно проверить, касаются ли две плоские кривые в заданной точке. Какие математические инструменты вы будете использовать?

2.

Задача: Обоснуйте, как соотношение между первой и второй производными параметрической функции влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры.

3.

Задача: Объясните, как кручение и кривизна связаны между собой для пространственной кривой. Приведите примеры кривых с заданными значениями кривизны и кручения.

4.

Задача: Опишите, что такое параметризация кривой по длине. Как она отличается от обычной параметризации?

5.

Задача: Объясните, что такое регулярная кривая и как это определение связано с производной кривой. Приведите примеры регулярных и нерегулярных кривых.

6.

Задача: Обоснуйте, как изменение параметра влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры, иллюстрирующие ваше объяснение.

7.

Задача: Обоснуйте, как можно определить касательную плоскость к поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Каковы необходимые условия для нахождения касательной плоскости?

8.

Задача: Опишите, что такое дифференцируемое многообразие. Каковы основные свойства и примеры таких многообразий?

Задачи на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите типы касания с их определениями:

Определение

1. Кривые пересекаются и имеют одинаковые производные
2. Кривые имеют одинаковые координаты в точке касания
3. Кривые касаются, но не пересекаются
4. Кривые имеют разные производные в точке касания

Тип касания

- A. Точка касания
- B. Простое касание
- C. Двойное касание
- D. Не касаются

2.

Задача: Соотнесите формулы с их значениями:

Формула

1. $\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

2. $\kappa = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. $\frac{dy}{dx}$

Значение

- A. Кривизна кривой
- B. Кривизна параметрической кривой
- C. Вторая производная
- D. Первая производная

3.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	A. Измеряет, насколько кривая "выкручивается" в пространстве.
2. Кручение	B. Мера изменения направления касательной к кривой.
3. Пространственная кривая	C. Кривая, заданная в трехмерном пространстве.
4. Длина дуги	D. Длина отрезка кривой между двумя точками.

4.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
A. Гладкая кривая	1. Кривая, для которой существует непрерывная производная.
B. Длина кривой	2. Интеграл от нормы производной по заданному интервалу.
C. Касательный вектор	3. Вектор, описывающий направление и скорость движения по кривой.
D. Параметризация	4. Представление кривой в виде функции от одного параметра.

5.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Кривая, у которой производная не равна нулю	A. Регулярная кривая
2. Изменение направления касательной к кривой	B. Кривизна
3. Кривая, которая может быть описана в виде $\gamma(t) = (x(t), y(t))$	C. Параметрическая кривая
4. Параметризация кривой в окрестности точки	D. Локальная параметризация

6.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	A. Параметр, описывающий изменение направления касательной
2. Длина плоской кривой	B. Интеграл, вычисляемый по параметрическому уравнению
3. Радиус кривизны	C. Обратная величина кривизны
4. Гладкая кривая	D. Кривая, которая имеет непрерывные производные до второго порядка

7.

Задача: Соотнесите уравнения касательных плоскостей с соответствующими поверхностями:

Уравнение касательной плоскости	Поверхность
1. $z = 2x + 3y - 1$	A. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x - y + 1$	B. $z = x^3 + y^3$
3. $z = 0$	C. $z = 3xy$
4. $z = 2x - y + 3$	D. $z = \sin(x) + \cos(y)$

8.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Множество точек, которое локально напоминает евклидово пространство	A. Дифференцируемое многообразие
2. Линейное пространство, ассоциированное с точкой многообразия	B. Касательное пространство
3. Непрерывное отображение между многообразиями	C. Гладкое отображение
4. Отображение, которое сохраняет структуру многообразия	D. Гомеоморфизм

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если:

1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Составитель



Гаиров Д.С.