

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
«28» августа 2024 г.
Заведующий кафедрой
математики и физики



Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
государственной итоговой аттестации

Направление 01.04.01 - «Математика»
Профиль подготовки – «Фундаментальная математика»
Форма подготовки – очная
Уровень подготовки – магистратура

Душанбе – 2024

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Математический анализ функций многих переменных»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства
				Вид	
1.	Дифференцируемость отображения. Частные производные.	ОПК-1	ИОПК-1.1. Знает методы решения актуальных и значимых проблем математики.	6	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.	ОПК-2	ИОПК-2.1. Знает методы создания и исследования новых математических моделей в естественных науках.	6	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Локальный экстремум функции многих переменных	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	6	Перечень вопросов для устного опроса
4.	Экстремум, условный экстремум функции многих переменных.	ОПК-1	ИОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	5	Перечень вопросов для устного опроса
5.	Интегралы, зависящие от параметра.	ОПК-2	ИОПК-2.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	6	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	6	Перечень вопросов для устного опроса
7.	Элементы теории поля.	ОПК-1	ИОПК-1.3. Владеет навыками решения актуальных и значимых проблем математики.	5	Перечень вопросов для устного опроса
8.	Ряды и интеграл Фурье	ОПК-2	ИОПК-2.3. Владеет практическим опытом создания и исследования подобных	6	Перечень вопросов для устного опроса

			математических моделей и разработки теорий и методов для их описания.		
9.	Функции на множестве комплексных чисел	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	6	Перечень вопросов для устного опроса
10.	Элементарные функции и отображения	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	6	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				58	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

по дисциплине (модулю) «Математический анализ функций многих переменных»

1. Область определения функции многих переменных
2. Предел и непрерывность функции многих переменных
3. Вычисление частных производных
4. Дифференциал функции многих переменных
5. Частные производные сложных функций
6. Частные производные неявных функций
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности
8. Частные производные и дифференциалы высших порядков
9. Экстремум функции нескольких переменных
10. Общая схема отыскания наибольших и наименьших значений функции нескольких переменных
11. Контрольная работа по теме "Дифференциальное исчисление функций многих переменных"
12. Двойной интеграл и его основные свойства. Выражение двойного интеграла через повторный с внешним интегрированием по различным переменным
13. Вычисление двойных интегралов повторным интегрированием
14. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах
15. Вычисление тройного интеграла повторным интегрированием
16. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах
17. Геометрические приложения двойных и тройных интегралов
18. Вычисление криволинейных интегралов первого рода
19. Вычисление криволинейных интегралов второго рода
20. Формула Грина
21. Геометрические приложения криволинейных интегралов
22. Контрольная работа по теме "Двойные и криволинейные интегралы"
23. Вычисление поверхностных интегралов первого рода
24. Вычисление поверхностных интегралов второго рода
25. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода
26. Понятие тригонометрического ряда Фурье

- 27.Разложение основных элементарных функций в ряд Фурье.
- 28.Лемма Римана. Формула Дирихле.
- 29.Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке.
- 30.Понятие интеграла Фурье.
- 31.Представление функции в виде интеграла Фурье.
- 32.Понятие преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье
- 33.Комплексные последовательности, предел и непрерывность функций на множестве комплексных чисел, два вида дифференцируемости, условия Коши-Римана.
- 34.Ограниченные комплексные последовательности.
- 35.Исследование сходимости последовательности комплексных чисел.
- 36.Правила дифференцирования функций комплексного переменного.
- 37.Элементарные функции: степенная, корень, показательная, логарифмическая, тригонометрические. Определения и свойства.
- 38.Нахождение действительной и мнимой части функции комплексного переменного.
- 39.Нахождение модуля и главного значения аргумента основных элементарных функций. Возведение в степень. Гиперболические функции.

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если

студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Математический анализ функций многих переменных»

1.

Задача: Если функция $f(x, y) = x^2 + y^2$, то частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ в точке $(1, 2)$ равна:

A) 1 B) 2 C) 2 D) 4

2.

Задача: Если функция $g(x, y) = e^{xy}$, то значение частной производной $\frac{\partial g}{\partial y}$ в точке $(0, 1)$ равно:

A) 0 B) 1 C) e D) 1

3.

Задача: Функция $f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (a, b) , если:

- A) f непрерывна в (a, b)
- B) \exists частные производные в (a, b)
- C) f имеет полное дифференциал
- D) f имеет максимум в (a, b)

4.

Задача: Какова частная производная функции $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$ по переменной x ?

- A) $2xy + 3y^2$
- B) $2x + 3y$
- C) $2xy + 6xy$
- D) $3x^2y$

5.

Задача: Какой порядок имеет частная производная $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

6.

Задача: Формула Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a выглядит следующим образом:

- A) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$
- B) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$
- C) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + R_n(x)$
- D) Все вышеперечисленное

7.

Задача: Найдите локальный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1)$.

- A) Локальный минимум
- B) Локальный максимум
- C) Нет экстремума

8.

Задача: Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найдите критические точки и определите их тип.

- A) $(0, 0)$ — седловая точка
- B) $(0, 0)$ — локальный минимум
- C) $(0, 0)$ — локальный максимум

9.

Задача: Если функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке (a, b) , то в этой точке выполняется:

- A) $\nabla f(a, b) = 0$
- B) $\nabla f(a, b) \neq 0$
- C) $\nabla^2 f(a, b) > 0$

10

Задача: Найдите точку экстремума функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

- A) (2, 3)
- B) (1, 1)
- C) (0, 0)
- D) (3, 2)

11.

Задача: Укажите, является ли функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ выпуклой на множестве \mathbb{R}^2 .

- A) Да
- B) Нет

12.

Задача: Если функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум в точке (a, b) , то градиент $\nabla f(a, b)$ равен:

- A) (0, 0)
- B) (1, 1)
- C) (a, b)
- D) (∞, ∞)

13.

Задача: Какой из следующих интегралов является интегралом, зависящим от параметра?

$$I(a) = \int_0^1 x^a dx$$

- A) $I(a) = \frac{1}{a-1}$
- B) $I(a) = \frac{1}{a}$
- C) $I(a) = a$
- D) $I(a) = a^2$

14.

Задача: Какой из следующих интегралов не имеет зависимости от параметра a ?

$$I(a) = \int_0^1 e^{ax} dx$$

- A) $I(0) = 1$
- B) $I(1) = \frac{e-1}{e}$
- C) $I(-1) = 1 - \frac{1}{e}$
- D) $I(a) = 1$

15.

Задача: Какой из следующих интегралов имеет производную по параметру, равную $\int_0^1 x^2 dx$?

$$I(a) = \int_0^1 x^a \sin(x) dx$$

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$

16.

Задача: Какой из следующих интегралов представляет собой кратный интеграл по области D в \mathbb{R}^2 ?

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

- a) $\int f(x) dx$
- b) $\int \int_D f(x, y) dy dx$
- c) $\int f(x, y, z) dz$
- d) $\int_C f(x, y) ds$

17.

Задача: Какой из следующих интегралов является криволинейным интегралом по кривой C ?

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

- a) $\int f(x) dx$
- b) $\int_C f(x, y, z) ds$
- c) $\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$
- d) $\int \int_D f(x, y) dx dy$

18.

Задача: Какой из следующих интегралов является поверхностным интегралом по поверхности S ?

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- a) $\int f(x) dx$
- b) $\iint_S f(x, y, z) dS$
- c) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
- d) $\int \int_D f(x, y) dx dy$

19.

Задача: Какое из следующих утверждений о векторном поле \mathbf{F} является верным?

- A) Векторное поле всегда является скалярным полем.
- B) Векторное поле может быть определено на произвольном множестве.
- C) Векторное поле может иметь разные значения в одной и той же точке пространства.
- D) Векторное поле не может быть непрерывным.

20.

Задача: Какое из следующих свойств не является свойством градиентного поля?

- A) Оно является консервативным.
- B) У него есть потенциальная функция.
- C) Его ротор равен нулю.
- D) Оно всегда направлено вверх.

21.

Задача: Какое из следующих утверждений о дивергенции векторного поля верно?

- A) Дивергенция всегда равна нулю.
- B) Дивергенция измеряет, насколько векторное поле "разбегается" из данной точки.
- C) Дивергенция не зависит от направления вектора.
- D) Дивергенция всегда положительна.

22.

Какое из следующих утверждений о ряде Фурье является верным?

- A) Ряд Фурье всегда сходится для любой функции.
- B) Ряд Фурье может не сходиться для функций с разрывами.
- C) Ряд Фурье представляет только периодические функции.
- D) Ряд Фурье не зависит от выбранного интервала.

23.

Какой из следующих коэффициентов используется для определения гармоник в ряде Фурье?

- A) Коэффициент Лапласа
- B) Коэффициент Фурье
- C) Коэффициент Бесселя
- D) Коэффициент Тейлора

24.

Какой из следующих интегралов представляет собой формулу для нахождения коэффициентов Фурье a_n ?

- A) $a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt$
- B) $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx$
- C) $a_n = \int_0^1 f(x) x^{n-1} dx$
- D) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$

25.

Какой из следующих типов функций называется аналитической функцией?

- A) Функция, которая определена на всей плоскости.
- B) Функция, которая имеет производные всех порядков в некоторой области.
- C) Функция, которая является непрерывной на всей плоскости.
- D) Функция, которая имеет конечное число разрывов.

26.

Какой из следующих критериев является необходимым для функции $f(z)$ быть аналитической в точке z_0 ?

- A) $f(z)$ должна быть непрерывной в точке z_0 .
- B) $f(z)$ должна быть дифференцируемой в точке z_0 .
- C) $f(z)$ должна быть ограниченной в окрестности z_0 .
- D) $f(z)$ должна быть постоянной в окрестности z_0 .

27.

Какое из следующих утверждений о комплексных функциях верно?

- A) Любая непрерывная функция является аналитической.
- B) Аналитическая функция имеет производную, которая тоже является аналитической.
- C) Комплексные функции не могут иметь полюс.
- D) Все аналитические функции имеют нули.

28.

Какой из следующих типов функций является элементарной?

- A) Функция, заданная через интеграл.
- B) Полиномиальная функция.
- C) Функция, заданная через ряд Фурье.
- D) Функция, заданная через дифференциальное уравнение.

29.

Какое из следующих утверждений о тригонометрических функциях верно?

- A) Все тригонометрические функции являются возрастающими.
- B) Тригонометрические функции периодичны.
- C) Тригонометрические функции не имеют пределов.
- D) Тригонометрические функции не могут быть определены на всех вещественных числах.

30.

Какой из следующих типов отображений является биективным?

- A) Отображение, которое не является ни инъективным, ни сюръективным.
- B) Отображение, которое является инъективным, но не сюръективным.
- C) Отображение, которое является и инъективным, и сюръективным.
- D) Отображение, которое является сюръективным, но не инъективным.

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно

обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И НА СООТВЕТСТВИЕ по дисциплине «Математический анализ функций многих переменных»

Задания открытого типа:

1.

Задача: Объясните, что такое частные производные функции нескольких переменных. Каковы условия их существования?

2.

Задача: Объясните, что такое частная производная и как она интерпретируется геометрически. Приведите примеры применения частных производных в различных областях.

3.

Задача: Объясните, что такое частные производные и как они связаны с градиентом функции нескольких переменных. Приведите примеры.

4.

Задача: Обоснуйте, как можно использовать метод Лагранжа для нахождения локальных экстремумов функции двух переменных с ограничениями. Приведите пример.

5.

Задача: Обоснуйте, как можно найти условный экстремум функции $f(x, y)$ при условии $g(x, y) = 0$ с помощью метода множителей Лагранжа. Приведите пример.

6.

Задача: Объясните, как вычислить интеграл, зависящий от параметра, с помощью теоремы о дифференцировании под знаком интеграла. Приведите пример такого интеграла.

7.

Задача: Объясните, что такое кратный интеграл, и приведите пример его вычисления для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ на области $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

8.

Задача: Объясните, что такое векторное поле и приведите примеры его применения в физике.

9.

Объясните, что такое ряд Фурье и как он используется для представления периодических функций. Приведите пример функции и её разложение в ряд Фурье.

10.

Опишите, что такое интеграл Фурье и как он отличается от ряда Фурье. Приведите пример применения интеграла Фурье.

11.

Обсудите условия сходимости рядов и интегралов Фурье. Какие теоремы гарантируют сходимость?

11.

Опишите основные свойства аналитических функций. Каковы условия, чтобы функция была аналитической в некоторой области?

12.

Объясните, что такое комплексное интегрирование и как оно отличается от интегрирования в вещественном анализе. Приведите пример.

13.

Каковы основные теоремы о комплексных функциях, такие как теорема Коши и теорема о вычетах? Приведите примеры их применения.

14.

Определите, что такое элементарные функции и приведите примеры. Каковы их основные свойства?

15.

Объясните, что такое отображение и как оно связано с функциями. Приведите примеры различных типов отображений.

16.

Каковы условия, при которых функция имеет обратное отображение? Объясните, как находить обратные функции.

17.

Каковы условия, при которых функция имеет обратное отображение? Объясните, как находить обратные функции.

Задания на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Частная производная	A. Производная функции по одной переменной при фиксированных остальных переменных
2. Дифференцируемость	B. Свойство функции, позволяющее аппроксимировать её с помощью линейного отображения
3. Полный дифференциал	C. Сумма частных производных, умноженных на соответствующие приращения переменных
4. Непрерывность	D. Свойство функции, при котором малые изменения аргументов приводят к малым изменениям значения функции

2.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Производная функции по одной переменной, фиксируя остальные переменные	A. Частная производная
2. Формула, позволяющая аппроксимировать функцию в окрестности точки	B. Формула Тейлора
3. Производная, которая вычисляется несколько раз	C. Высшая производная
4. Функция, которая показывает, как изменяется функция при изменении переменной	D. Дифференциал

3.

Термин	Определение
1. Частная производная	A. Производная функции нескольких переменных
2. Градиент	B. Линейный оператор, связывающий векторы
3. Формула Тейлора	C. Разложение функции в ряд в окрестности точки
4. Дифференциал	D. Приближение изменения функции

4.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Критическая точка	A. Точка, в которой градиент функции равен нулю
2. Метод Лагранжа	B. Метод нахождения экстремумов с ограничениями
3. Второй производный тест	C. Метод определения типа критической точки
4. Локальный экстремум	D. Значение функции в окрестности критической точки

5.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
A. Локальный экстремум	1. Точка, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение на некоторой окрестности.
B. Условный экстремум	2. Значение функции при заданных условиях.
C. Градиент	3. Вектор, указывающий направление наибольшего роста функции.
D. Выпуклая функция	4. Функция, для которой все ее секущие линии лежат выше графика.

6.

Задача: Соотнесите интегралы с их значениями:

Интеграл	Значение
1. $I(a) = \int_0^1 x^a dx$	A. $\frac{1}{a+1}$
2. $I(a) = \int_0^1 e^{ax} dx$	B. $\frac{e^a - 1}{a}$
3. $I(a) = \int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx$	C. $\frac{1}{2(a+1)}$
4. $I(a) = \int_0^1 \sin(ax) dx$	D. $\frac{1 - \cos(a)}{a}$

7.

Задача: Соотнесите тип интеграла с его определением:

Тип интеграла	Определение
1. Кратный интеграл	A. Интеграл по кривой в пространстве, зависящий от параметров x и y
2. Криволинейный интеграл	B. Интеграл по поверхности векторного поля
3. Поверхностный интеграл	C. Интеграл, вычисляемый по области в многообразии, например, в \mathbb{R}^2

8.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
A. Векторное поле	1. Мера изменения векторного поля вокруг точки.
B. Градиент	2. Поле, которое имеет направление и величину в каждой точке пространства.
C. Дивергенция	3. Поле, связанное с потенциальной функцией.
D. Ротор	4. Мера вращения векторного поля в данной точке.

9.

Определение/Концепция	Термин
1. Представление функции в виде суммы синусов и косинусов	A. Интеграл Фурье
2. Конвергенция ряда Фурье для функции, которая является кусочно-гладкой	B. Ряд Фурье
3. Условие, при котором ряд Фурье сходится в точке	C. Условие Дирихле

10.

Определение/Концепция	Термин
1. Функция, которая имеет производную в каждой точке области	A. Гладкая функция
2. Функция, которая аналитична в некоторой области комплексной плоскости	B. Комплексная функция
3. Свойство функции, позволяющее применять теорему Коши	C. Холоморфность

11.

Определение/Концепция	Термин
1. Функции, которые могут быть представлены как конечные комбинации алгебраических операций	А. Элементарные функции
2. Отображение, сохраняющее структуру между двумя множествами	В. Гомоморфизм
3. Функции, которые имеют обратные функции в каждой точке своей области	С. Биективные функции

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Дополнительные главы высшей алгебры»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства Вид
11.	Бинарные отношения и алгебраические операции	ОПК-1	ИОПК-1.1. Знает методы решения актуальных и значимых проблем математики.	9	Перечень вопросов для устного опроса
12.	Группы	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	8	Перечень вопросов для устного опроса
13.	Кольца	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	9	Перечень вопросов для устного опроса
14.	Поля	ОПК-1	ИОПК-1.3. Владеет навыками решения актуальных и значимых проблем математики.	9	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				35	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Дополнительные главы высшей алгебры»

1. Бинарные отношения и их свойства
2. Виды бинарных отношений
3. Операции над бинарными отношениями
4. Алгебраические операции и их свойства
5. Полугруппы
6. Группы
7. Группы подстановок
8. Фактор группа
9. Абелевы группы
10. Кольца
11. Поля
12. Многочлены над полями. Деление многочленов
13. Фактор кольцо
14. Расширение полей
15. Алгебры над полем
16. Сопряженный кватернион
17. Теорема Фробениуса

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА
по дисциплине «Дополнительные главы высшей алгебры»

1.

Задача: Какое из следующих множеств является алгеброй подмножеств?

- А) Множество всех подмножеств множества $\{1, 2, 3\}$
- В) Множество всех четных чисел
- С) Множество всех натуральных чисел
- D) Множество всех чисел, больших 5

2.

Задача: Если A и B — два подмножества некоторого множества X , то какое из следующих утверждений обязательно верно для алгебры подмножеств?

- A) $A \cup B$ всегда является подмножеством X
- B) $A \cap B$ всегда является подмножеством X
- C) A^c всегда является подмножеством X
- D) Все вышеперечисленные

3.

Задача: Какое из следующих свойств не является свойством алгебры подмножеств?

- A) Замкнутость относительно пересечения
- B) Замкнутость относительно объединения
- C) Наличие пустого множества
- D) Наличие бесконечного множества

4.

Задача: Какое из следующих множеств является подмножеством множества \mathbb{R} ?

- A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
- B) $\{1, 2, 3\}$
- C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x - \text{четное число}\}$
- D) Все перечисленные

5.

Задача: Какое из следующих утверждений верно для любого подмножества $A \subseteq \mathbb{R}$?

- A) $A \cap A = A$
- B) $A \cup A = \emptyset$
- C) $A \setminus A = A$
- D) $A \cap \emptyset = A$

6.

Задача: Если A и B — подмножества множества X , то какое из следующих утверждений неверно?

- A) $A \subseteq A$
- B) $A \cap B \subseteq A$
- C) $A \cup B \subseteq A$
- D) $A \setminus B \subseteq A$

7.

Задача: Какое из следующих утверждений верно для универсальных алгебр?

- A) Универсальные алгебры не могут иметь операций различной арности.
- B) Универсальная алгебра может быть описана с помощью множества операций и соотношений между ними.
- C) Все универсальные алгебры являются конечномерными.
- D) Универсальные алгебры не могут быть ассоциативными.

8.

Задача: Какой из следующих примеров является универсальной алгеброй?

- A) Группа
- B) Поле
- C) Множество с операцией сложения
- D) Все вышеперечисленное

9.

Задача: Какое из следующих свойств не обязательно относится к универсальным алгебрам?

- A) Наличие операции нуля
- B) Наличие операции единицы
- C) Наличие операций различной арности
- D) Наличие только одной операции

10

Задача: Какое из следующих утверждений о сигнатуре алгебры является верным?

- A) Сигнатура алгебры всегда положительна.
- B) Сигнатура алгебры включает количество операций и их арности.
- C) Сигнатура алгебры не влияет на ее структуру.
- D) Сигнатура алгебры всегда равна нулю.

11.

Задача: Какой из следующих типов алгебры имеет единственную бинарную операцию, которая является ассоциативной и коммутативной?

- A) Групповая алгебра
- B) Поле
- C) Коммутативная алгебра
- D) Модуль

12.

Задача: Какой ранг алгебры соответствует количеству независимых элементов в базисе?

- А) Ноль
- В) Один
- С) Ранг равен размерности
- D) Ранг равен количеству всех элементов

13.

Задача: Какое из следующих множеств является кольцом?

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ четное}\}$$

- А) Да, это кольцо.
- В) Нет, это не кольцо.
- С) Это кольцо, но не замкнуто относительно вычитания.
- D) Это кольцо, но не замкнуто относительно умножения.

14.

Задача: Какое из следующих утверждений о кольцах является верным?

- А) Каждое кольцо является полем.
- В) В кольце может не быть единицы.
- С) Кольцо не может содержать нулевой элемент.
- D) Все элементы кольца обязательно являются делителями нуля.

15.

Задача: Какое из следующих множеств является идеалом кольца \mathbb{Z} ?

- А) $2\mathbb{Z}$ (четные числа)
- В) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- С) $\{0\}$
- D) \mathbb{Z}

16.

Задача: Какое из следующих утверждений верно для области целостности R ?

- А) Все элементы R являются делителями нуля.
- В) Для любых $a, b \in R$, если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.
- С) Область целостности всегда является полем.
- D) В области целостности не может быть единицы.

17.

Задача: Если R - область целостности, то каково свойство поля частных K от R ?

- А) K не содержит делителей нуля.
- В) K всегда является конечным полем.
- С) Все элементы K являются делителями нуля.
- D) K не может быть расширением поля R .

18.

Задача: Какой из следующих элементов не является элементом поля частных K области целостности R ?

- A) $\frac{a}{b}$ для $a, b \in R, b \neq 0$.
- B) $\frac{0}{b}$ для $b \neq 0$.
- C) $\frac{a}{0}$ для $a \neq 0$.
- D) $\frac{0}{0}$.

19.

Задача: Какое из следующих утверждений верно для точной верхней грани множества A ?

- A) Точная верхняя грань всегда меньше или равна любой верхней грани.
- B) Точная верхняя грань всегда больше или равна любой нижней грани.
- C) Точная верхняя грань равна максимальному элементу множества.
- D) Точная верхняя грань может не существовать для любого множества.

20.

Задача: Какое из следующих утверждений верно для точной нижней грани множества B ?

- A) Точная нижняя грань всегда больше или равна любой нижней грани.
- B) Точная нижняя грань всегда меньше или равна любой верхней грани.
- C) Точная нижняя грань равна минимальному элементу множества.
- D) Точная нижняя грань всегда существует для любого непустого множества.

21.

Задача: Если A — это подмножество вещественных чисел, то какая из следующих формул правильно определяет точную верхнюю грань \bar{A} ?

- A) $\bar{A} = \sup A$
- B) $\bar{A} = \inf A$
- C) $\bar{A} = \max A$
- D) $\bar{A} = \min A$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «хорошо», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «удовлетворительно», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «неудовлетворительно», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И НА СООТВЕТСТВИЕ по дисциплине «Дополнительные главы высшей алгебры»

Задания открытого типа:

1.

Задача: Опишите основные свойства алгебры подмножеств. Как эти свойства влияют на операции с подмножествами?

2.

Задача: Опишите, что такое подмножество множества и приведите примеры различных типов подмножеств (например, пустое множество, конечное, бесконечное, равное и собственное подмножество).

3.

Задача: Опишите, что такое универсальная алгебра и приведите примеры различных видов универсальных алгебр, включая их операции и соотношения.

4.

Задача: Объясните, что такое сигнатура алгебры и как она влияет на свойства данной алгебры. Приведите примеры различных сигнатур.

5.

Задача: Опишите основные свойства колец. Как они отличаются от свойств полей?

6.

Задача: Объясните, что такое область целостности и приведите примеры таких областей. Каковы основные свойства области целостности?

7.

Задача: Объясните, что такое точная верхняя и точная нижняя грань подмножества. Приведите примеры, чтобы проиллюстрировать ваше объяснение.

Задания на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Алгебра подмножеств	A. Множество, содержащее все подмножества данного множества
2. Пустое множество	B. Множество, не содержащее ни одного элемента
3. Объединение множеств	C. Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств
4. Пересечение множеств	D. Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих обоим множествам

2.

Задача: Соотнесите типы подмножеств с их определениями:

Определение	Тип подмножества
1. Подмножество, содержащее все элементы другого множества	A. Равное подмножество
2. Подмножество, не содержащее ни одного элемента другого множества	B. Пустое подмножество
3. Подмножество, содержащее некоторые, но не все элементы другого множества	C. Собственное подмножество
4. Подмножество, содержащее все элементы другого множества и не содержит других	D. Полное подмножество

3.

Задача: Соотнесите типы универсальных алгебр с их определениями:

Определение	Тип универсальной алгебры
1. Структура, в которой операции могут быть определены для двух элементов.	A. Группа
2. Структура, в которой определены операции сложения и умножения.	B. Кольцо
3. Структура, в которой операции сложения и умножения удовлетворяют дистрибутивному закону.	C. Поле
4. Структура, в которой операции удовлетворяют всем аксиомам поля.	D. Алгебра

4.

Задача: Соотнесите типы алгебры с их характеристиками:

Тип алгебры	Характеристика
1. Ассоциативная алгебра	A. Обладает единичным элементом
2. Коммутативная алгебра	B. Операция не обязательно коммутативна
3. Некоммутативная алгебра	C. Операции удовлетворяют ассоциативному закону
4. Поле	D. Каждая ненулевая элемент имеет обратный элемент

5.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Множество, замкнутое относительно сложения и умножения	A. Кольцо
2. Подмножество кольца, которое является кольцом само по себе	B. Идеал
3. Кольцо, в котором для любых двух элементов a и b выполняется $ab = 0$	C. Кольцо делителей нуля
4. Кольцо, в котором существует единица	D. Кольцо с единицей

6.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Область целостности	A. Структура, в которой нет делителей нуля.
2. Поле частных	B. Расширение области целостности, содержащее дроби.
3. Делитель нуля	C. Элемент, при умножении на который результат равен нулю.
4. Неполное поле	D. Поле, в котором не все элементы имеют обратные.

7.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Наименьшее верхнее ограничение множества	A. Точная верхняя грань
2. Наибольшее нижнее ограничение множества	B. Точная нижняя грань
3. Элемент, который является верхней гранью	C. Верхняя грань
4. Элемент, который является нижней гранью	D. Нижняя грань

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если

студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства Вид
15.	Основные структуры функционального анализа	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	6	Перечень вопросов для устного вопроса
16.	Топологические пространства		ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	6	Перечень вопросов для устного вопроса
17.	Компактность в топологических и метрических пространствах		ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	6	Перечень вопросов для устного вопроса
18.	Конструкция пространств Лебега		ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-	6	Перечень вопросов для устного вопроса

			исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии		
19.	Нормированные и банаховы алгебры		ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	6	Перечень вопросов для устного вопроса
20.	Вполне непрерывные операторы.		ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	6	Перечень вопросов для устного вопроса
Всего:				36	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

1. Метрические и предметрические пространства
2. Нормированные и преднормированные пространства
3. Пространства со скалярным произведением и взаимосвязь между данными типами пространств
4. Сравнение топологий
5. Индуцированная топология
6. Замыкание
7. Отделимость
8. Полнота метрического пространства
9. Базы и предбазы топологии
10. Сходимость в топологических пространствах
11. Свойства компактов
12. Связь с аксиомами отделимости
13. Характеризация компактов в метрических пространствах
14. Критерии компактности в конкретных нормированных пространствах
15. Прямые суммы и пересечения подпространств преднормированного пространства
16. Факторпространство по подпространству преднормированного пространства

17. Критерий нормируемости факторпространства
18. Иллюстрация общей конструкции построения факторпространства в случае пространств Лебега
19. Кольца и их основные свойства
20. Нормированные и банаховы алгебры
21. Инволютивные
22. Звёздные и C^* -алгебры
23. Примеры классических банаховых алгебр
24. Идеалы и факторалгебры банаховых алгебр
25. Начала спектральной теории для коммутативных банаховых алгебр
26. Вполне непрерывные операторы и их свойства
27. Три теоремы Фредгольма
28. Случай конечномерного оператора
29. Спектральная теория вполне непрерывных операторов.

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

1.

Задача: Является ли множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ векторным пространством?

- А) Да
- В) Нет

2.

Задача: Какое из следующих свойств является необходимым для того, чтобы оператор $T : X \rightarrow Y$ был непрерывным, если X и Y — нормированные пространства?

- А) Существование обратного оператора
- В) Существование константы C , такой что $\|Tx\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in X$
- С) Линейность оператора
- D) Все вышеперечисленные

3.

Задача: Если $T : X \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор, то его операторная норма определяется как:

- А) $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$
- В) $\|T\| = \inf_{\|x\| \geq 1} \|Tx\|$
- С) $\|T\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|$
- D) $\|T\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$

4.

Задача: Является ли множество \mathbb{R}^n с обычной топологией (топология, порожденная евклидовой метрикой) топологическим пространством?

- А) Да
- В) Нет

5.

Задача: Какое из следующих свойств является необходимым для того, чтобы множество U было открытым в топологическом пространстве X ?

- А) Для любого $x \in U$ существует окрестность V такая, что $V \subset U$
- В) U является пустым множеством
- С) U является замкнутым множеством
- D) Все вышеперечисленные

6.

Задача: Если X — топологическое пространство, а $A \subseteq X$, то замыкание \bar{A} является:

- А) Открытым множеством
- В) Замкнутым множеством
- С) Пустым множеством
- D) Никаким из перечисленных

7.

Задача: Является ли множество $[0, 1]$ компактным в стандартной топологии на \mathbb{R} ?

- А) Да
- В) Нет

8.

Задача: Какое из следующих множеств является компактным в \mathbb{R}^2 ?

- А) Открытый круг радиуса 1
- В) Замкнутый квадрат со сторонами 1
- С) Полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

9.

Задача: Если X — компактное пространство и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то:

- А) f достигает максимума на X
- В) f не достигает максимума на X

10.

Задача: Какое из следующих свойств характерно для пространств Лебега?

- А) Полнота
- В) Ограниченность
- С) Линейная независимость
- D) Дискретность

11.

Задача: Если f — измеримая функция на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^n$, и $\int_E |f| dx < \infty$, то f принадлежит какому пространству?

- А) $L^1(E)$
- В) $L^2(E)$
- С) $L^\infty(E)$
- D) $C(E)$

12.

Задача: Является ли пространство $L^2([0, 1])$ банаховым пространством?

- А) Да
- В) Нет

13.

Задача: Является ли множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ банаховой алгеброй?

- А) Да
- В) Нет

15.

Задача: Если A и B — это элементы банаховой алгебры, то их произведение AB также принадлежит этой алгебре?

- А) Да
- В) Нет

16.

Задача: Какова норма оператора $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, заданного как $(Tf)(x) = 2f(x)$?

- А) 1
- В) 2
- С) 0
- D) Бесконечность

17.

Задача: Является ли оператор $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, заданный как $(Tf)(x) = xf(x)$, вполне непрерывным?

- А) Да
- В) Нет

18.

Задача: Какое из следующих свойств является характеристикой вполне непрерывного оператора?

- А) Существование собственных значений
- В) Компактность
- С) Линейность
- D) Непрерывность

19.

Задача: Если оператор T является вполне непрерывным, то его спектр состоит из:

- А) Только нуля
- В) Конечного числа точек
- С) Конечного числа точек и нуля
- D) Бесконечного числа точек

20.

Задача: Какое из следующих утверждений о вполне непрерывных операторах верно?

- а) Вполне непрерывные операторы всегда являются компактными.
- б) Вполне непрерывные операторы не могут иметь собственные значения.
- с) Вполне непрерывные операторы всегда имеют непрерывный спектр.

21.

Задача: Если T — вполне непрерывный оператор на банаховом пространстве, то его спектр $\sigma(T)$ является:

- а) Ограниченным.
- б) Неограниченным.
- с) Множество всех комплексных чисел.

22.

Задача: Какое из следующих свойств является характерным для спектра компактного оператора?

- а) Спектр всегда содержит ноль.
- б) Спектр состоит только из конечного числа точек.
- с) Спектр может содержать только предельные точки.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И ЗАДАЧИ НА СООТВЕТСТВИЕ

по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

Задачи открытого типа:

1.

Задача: Объясните, что такое банахово пространство и приведите несколько примеров. Каковы основные свойства таких пространств?

2.

Задача: Опишите основные свойства топологических пространств. Каковы критерии для того, чтобы множество было открытым или замкнутым?

3.

Задача: Объясните, что такое компактное пространство в топологии. Приведите примеры и не примеры компактных пространств.

4.

Задача: Объясните, каковы основные шаги в конструкции пространства Лебега. Как они отличаются от конструкции пространства Римана?

5.

Задача: Объясните, что такое банахова алгебра и приведите примеры таких алгебр. Каковы основные свойства банаховых алгебр, которые отличают их от обычных алгебр?

6.

Задача: Опишите основные свойства вполне непрерывных операторов. Каковы условия, при которых оператор можно считать вполне непрерывным?

7.

Задача: Опишите основные свойства вполне непрерывных операторов. Как эти свойства влияют на структуру их спектра?

Задачи на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Линейный оператор	A. Пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится
2. Нормированное пространство	B. Отображение, сохраняющее операции сложения и умножения на скаляр
3. Банахово пространство	C. Пространство с нормой, удовлетворяющей определенным условиям
4. Компактный оператор	D. Оператор, который переводит ограниченные подмножества в относительно компактные подмножества

2.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Топологическое пространство	A. Множество, которое не может быть представлено как объединение двух непустых открытых множеств
2. Открытое множество	B. Семейство подмножеств, удовлетворяющее аксиомам топологии
3. Замкнутое множество	C. Множество, содержащее все свои предельные точки
4. Связное пространство	D. Множество, в котором для каждой точки существует окрестность, полностью лежащая в этом множестве

3.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Пространство, в котором каждая открытая покрывающая имеет конечное подпокрытие
2. Множество, в котором каждая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность
3. Топологическое пространство, в котором каждая открытая последовательность является открытой
4. отображение, сохраняющее топологическую структуру между двумя пространствами

Термин

- A. Компактное пространство
- B. Секвенциальная компактность
- C. Гомеоморфизм
- D. Непрерывное отображение

4.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Функция, которая является измеримой и интегрируема по Лебегу
2. Множество всех измеримых функций, для которых интеграл конечен
3. Мера, которая присваивает ноль множествам меры нуля
4. Нормированное пространство, состоящее из классов эквивалентности функций

Термин

- A. Измеримая функция
- B. Пространство L^1
- C. Мера Лебега
- D. Пространство L^p

5.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Алгебра, в которой операция умножения является ассоциативной и коммутативной
2. Пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится
3. Алгебра, где определена норма и выполняются условия для банаховой алгебры
4. Алгебра, в которой существуют единичный элемент и обратные элементы

Термин

- A. Нормированная алгебра
- B. Банахова алгебра
- C. Нормированная алгебра
- D. Алгебра с единицей

6.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Оператор, который сохраняет компактность при ограниченных последовательностях
2. Множество всех собственных значений оператора
3. Оператор, который является ограниченным и компактным
4. Значение, при котором оператор не имеет собственных векторов

Термин

- A. Вполне непрерывный оператор
- B. Спектр
- C. Компактный оператор
- D. Нуль собственное значение

7.

Задача: Соотнесите свойства с терминами:

Свойство

1. Спектр состоит из собственных значений и нуля.
2. Спектр является замкнутым множеством.
3. Оператор имеет конечное число собственных значений.
4. Существует предельная точка спектра.

Термин

- A. Вполне непрерывный оператор
- B. Компактный оператор
- C. Непрерывный оператор
- D. Оператор с непрерывным спектром

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства Вид
21.	Плоские кривые	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	10	Перечень вопросов для устного опроса
22.	Пространственные кривые	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	10	Перечень вопросов для устного опроса
23.	Общая локальная теория кривых	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
24.	Основная теорема локальной теории кривых	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы	10	Перечень вопросов для устного опроса

			и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии		
25.	Дополнительные теоремы теории плоских кривых	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	10	Перечень вопросов для устного опроса
26.	Понятие поверхности	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
27.	Многообразия	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	10	Перечень вопросов для устного опроса
28.	Элементы тензорной алгебры	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и	10	Перечень вопросов для устного опроса

			научно-производственные работы.		
29.	Тензорные поля на многообразиях	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
30.	Риманова геометрия	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	11	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				61	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1. Плоские кривые.
2. Способы задания пространственных кривых
3. Кривые в n-мерном евклидовом пространстве
4. Основная теорема локальной теории кривых
5. Теорема Хопфа
6. Понятие поверхности
7. Способы задания поверхности
8. Понятие многообразия
9. Карты и атлас
10. Векторное и сопряженное пространства
11. Канонический изоморфизм
12. Дуальные базисы
13. Различные определения касательного вектора

14. Касательное пространство к многообразию в точке

15. Погружение, вложение, подмногообразие

16. Метрика

17. Риманово (псевдориманово) многообразие

18. Индуцированная метрика

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «не зачтено»

Решение неверное или отсутствует

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1.

Задача: Какое условие необходимо для того, чтобы две плоские кривые C_1 и C_2 касались друг друга в точке P ?

- А) Они должны пересекаться в точке P .
- В) У них должны совпадать производные в точке P .
- С) Они должны иметь одинаковую длину.
- D) Они должны быть параллельны.

2.

Задача: Найдите точку касания кривых $y = x^2$ и $y = 2x - 1$.

- А) $(0, 0)$
- В) $(1, 1)$
- С) $(1, 1)$ и $(0, 0)$
- D) Кривые не касаются.

3.

Задача: Для каких значений параметра a кривые $y = ax^2$ и $y = x + a$ касаются друг друга?

- А) $a = 0$
- В) $a = 1$
- С) $a = -1$
- D) $a = \frac{1}{2}$

4.

Задача: Найдите кривизну плоской кривой, заданной параметрически:

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.

Задача: Для какой из следующих кривых кривизна постоянна?

a) $y = x^2$

b) $y = \sin(x)$

c) $y = x$

d) $y = c$ (где c — константа)

6.

Задача: Какое из следующих утверждений о кривизне пространственной кривой верно?

- A) Кривизна всегда положительна.
- B) Кривизна может быть отрицательной.
- C) Кривизна равна нулю только для прямых.
- D) Все вышеуказанные утверждения верны.

7.

Задача: Как называется мера изменения направления касательной к кривой в пространстве?

- A) Кривизна
- B) Кручение
- C) Длина дуги
- D) Угловая скорость

8.

Задача: Если кривая задана параметрически уравнениями $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то формула для кривизны κ кривой равна:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Верно ли это утверждение?

- A) Верно
- B) Неверно

9.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, где I — некоторый интервал. Какой из следующих условий достаточен для того, чтобы γ была параметризована по длине?

- А) $\|\gamma'(t)\| = 1$ для всех $t \in I$.
- В) γ является дифференцируемой функцией.
- С) γ замкнута.

10.

Задача: Какое из следующих утверждений верно относительно кривой $\gamma(t)$, если $\gamma'(t) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$?

- А) Кривая в точке t_0 имеет точку перегиба.
- В) Кривая в точке t_0 имеет локальный экстремум.
- С) Кривая γ не может быть гладкой.

11.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то:

- А) Кривая замкнута.
- В) Кривая пересекает сама себя.
- С) Кривая является гладкой.

12.

Задача: Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, где I — интервал. Если $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$, то кривая γ является:

- А) Линейной
- В) Параметрической
- С) Регулярной
- D) Замкнутой

13.

Задача: Если кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\gamma''(t) = 0$ для некоторого $t \in I$, то кривая:

- А) Прямая
- В) Кривая с постоянной кривизной
- С) Кривая с постоянной скоростью
- D) Кривая с постоянным направлением

14.

Задача: Основная теорема локальной теории кривых утверждает, что в окрестности точки t_0 кривая $\gamma(t)$ может быть описана как:

- A) Линейная функция
- B) Полиномиальная функция
- C) Локальная параметризация
- D) Параметрическая кривая

15.

Задача: Какое из следующих утверждений о плоских кривых является верным?

- A) Все плоские кривые являются гладкими.
- B) Плоская кривая может иметь точки разрыва.
- C) Плоская кривая всегда замкнута.
- D) Все плоские кривые имеют одинаковую длину.

16.

Задача: Какое из следующих свойств не относится к кривизне плоской кривой?

- A) Кривизна может быть положительной или отрицательной.
- B) Кривизна всегда равна нулю для прямой линии.
- C) Кривизна плоской кривой всегда постоянна.
- D) Кривизна характеризует степень изменения направления касательной.

17.

Задача: Как называется теорема, утверждающая, что если плоская кривая имеет постоянную кривизну, то она является окружностью?

- A) Теорема о постоянной кривизне.
- B) Теорема Френе.
- C) Теорема о кривизне и радиусе.
- D) Теорема Бенедикта.

18.

Задача: Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, 2)$.

- A) $z = 2x + 2y - 2$
- B) $z = 2x + 2y - 1$
- C) $z = 2x + 2y + 1$
- D) $z = 2x + 2y + 2$

19.

Задача: Какова формула для нахождения уравнения касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) ?

- A) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
- B) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(y - y_0) + f_y(x_0, y_0)(x - x_0)$
- C) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y + y_0)$
- D) $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x + x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

20.

Задача: Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \sin(x) + \cos(y)$ в точке $(0, 0, 1)$.

- A) $z = x + y + 1$
- B) $z = x + y$
- C) $z = -x + y + 1$
- D) $z = -x - y + 1$

21.

Задача: Какой из следующих объектов является 2-мерным многообразием?

- A) Прямая линия
- B) Круг
- C) Плоскость
- D) Точка

22.

Задача: Является ли множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ многообразием?

- A) Да
- B) Нет

23.

Задача: Какой из следующих объектов является гладким многообразием?

- А) Окружность в \mathbb{R}^2
- В) Множество всех точек, где функция $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ равна нулю
- С) Оба
- D) Ни один

24.

Задача: Какое из следующих утверждений о касательном пространстве в точке p многообразия M верно?

- А) Касательное пространство всегда является векторным пространством.
- В) Касательное пространство является подмножеством M .
- С) Касательное пространство содержит только одну точку p .
- D) Касательное пространство всегда имеет размерность 1.

25.

Какой из следующих объектов является тензором второго ранга?

- А) Вектор
- В) Скаляр
- С) Матрица
- D) Функция

26.

Какое из следующих свойств не является свойством тензоров?

- А) Линейность
- В) Асимметричность
- С) Непрерывность
- D) Мультипликативность

27.

Какой из следующих законов преобразования тензоров верен для тензора второго ранга при изменении базиса?

- А) $T'_{ij} = T_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}$
- В) $T'_{ij} = T_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j}$
- С) $T'_{ij} = T_{ij}$
- D) $T'_{ij} = T_{ij} + C$

28.

Какой из следующих объектов представляет собой тензорное поле на многообразии?

- A) Скалярная функция
- B) Векторное поле
- C) Тензорное поле
- D) Все вышеперечисленное

29.

Какой тип тензорного поля описывает кривизну многообразия?

- A) Нормальное поле
- B) Векторное поле
- C) Тензор кривизны
- D) Скалярное поле

30.

Какое из следующих утверждений о тензорных полях на многообразиях верно?

- A) Тензорные поля могут иметь разные ранги в разных точках многообразия.
- B) Тензорные поля всегда являются скалярными функциями.
- C) Тензорные поля не могут быть интегрированы.
- D) Тензорные поля всегда являются постоянными.

31.

Какой из следующих объектов является ключевым понятием в римановой геометрии?

- A) Плоская поверхность
- B) Риманова метрика
- C) Линейное пространство
- D) Скалярное произведение

32.

Какой из следующих свойств не относится к римановой метрике?

- A) Симметричность
- B) Положительная определенность
- C) Линейность
- D) Непрерывность

33.

Какой из следующих результатов связан с римановой геометрией?

- A) Теорема Пифагора
- B) Формула Гаусса
- C) Теорема о кривизне
- D) Все вышеперечисленное

Критерии оценки:

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «**не зачтено**»

Решение неверное или отсутствует

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И ЗАДАЧИ НА СООТВЕТСТВИЕ

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

Задачи открытого типа:

1.

Задача: Обоснуйте, как можно проверить, касаются ли две плоские кривые в заданной точке. Какие математические инструменты вы будете использовать?

2.

Задача: Обоснуйте, как соотношение между первой и второй производными параметрической функции влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры.

3.

Задача: Объясните, как кручение и кривизна связаны между собой для пространственной кривой. Приведите примеры кривых с заданными значениями кривизны и кручения.

4.

Задача: Опишите, что такое параметризация кривой по длине. Как она отличается от обычной параметризации?

5.

Задача: Объясните, что такое регулярная кривая и как это определение связано с производной кривой. Приведите примеры регулярных и нерегулярных кривых.

6.

Задача: Обоснуйте, как изменение параметра влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры, иллюстрирующие ваше объяснение.

7.

Задача: Обоснуйте, как можно определить касательную плоскость к поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Каковы необходимые условия для нахождения касательной плоскости?

8.

Задача: Опишите, что такое дифференцируемое многообразие. Каковы основные свойства и примеры таких многообразий?

9.

Опишите основные операции в тензорной алгебре, такие как сложение, умножение и контракция тензоров. Приведите примеры для каждой операции, чтобы проиллюстрировать их применение.

10.

Объясните, что такое тензорное поле на многообразии и как оно связано с понятиями гладкости и дифференцируемости. Приведите пример тензорного поля на двумерной сфере.

11.

Опишите основные концепции Римановой геометрии, включая метрику Римана, кривизну и геодезические линии. Как эти понятия взаимосвязаны и как они применяются в общей теории относительности?

Задачи на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите типы касания с их определениями:

Определение

1. Кривые пересекаются и имеют одинаковые производные
2. Кривые имеют одинаковые координаты в точке касания
3. Кривые касаются, но не пересекаются
4. Кривые имеют разные производные в точке касания

Тип касания

- A. Точка касания
- B. Простое касание
- C. Двойное касание
- D. Не касаются

2.

Задача: Соотнесите формулы с их значениями:

Формула

1. $\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

2. $\kappa = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. $\frac{dy}{dx}$

Значение

A. Кривизна кривой

B. Кривизна параметрической кривой

C. Вторая производная

D. Первая производная

3.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	А. Измеряет, насколько кривая "выкручивается" в пространстве.
2. Кручение	В. Мера изменения направления касательной к кривой.
3. Пространственная кривая	С. Кривая, заданная в трехмерном пространстве.
4. Длина дуги	Д. Длина отрезка кривой между двумя точками.

4.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
А. Гладкая кривая	1. Кривая, для которой существует непрерывная производная.
В. Длина кривой	2. Интеграл от нормы производной по заданному интервалу.
С. Касательный вектор	3. Вектор, описывающий направление и скорость движения по кривой.
Д. Параметризация	4. Представление кривой в виде функции от одного параметра.

5.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Кривая, у которой производная не равна нулю	А. Регулярная кривая
2. Изменение направления касательной к кривой	В. Кривизна
3. Кривая, которая может быть описана в виде $\gamma(t) = (x(t), y(t))$	С. Параметрическая кривая
4. Параметризация кривой в окрестности точки	Д. Локальная параметризация

6.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	A. Параметр, описывающий изменение направления касательной
2. Длина плоской кривой	B. Интеграл, вычисляемый по параметрическому уравнению
3. Радиус кривизны	C. Обратная величина кривизны
4. Гладкая кривая	D. Кривая, которая имеет непрерывные производные до второго порядка

7.

Задача: Соотнесите уравнения касательных плоскостей с соответствующими поверхностями:

Уравнение касательной плоскости	Поверхность
1. $z = 2x + 3y - 1$	A. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x - y + 1$	B. $z = x^3 + y^3$
3. $z = 0$	C. $z = 3xy$
4. $z = 2x - y + 3$	D. $z = \sin(x) + \cos(y)$

8.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Множество точек, которое локально напоминает евклидово пространство	A. Дифференцируемое многообразие
2. Линейное пространство, ассоциированное с точкой многообразия	B. Касательное пространство
3. Непрерывное отображение между многообразиями	C. Гладкое отображение
4. Отображение, которое сохраняет структуру многообразия	D. Гомеоморфизм

9.

Определение	Термин
1. Математическая структура, обобщающая векторы и матрицы	A. Тензор
2. Операция, которая сочетает два тензора и дает новый тензор	B. Тензорное произведение
3. Специальный случай тензора, имеющий порядок 1	C. Вектор
4. Свойство, позволяющее тензорам изменять свои компоненты при изменении базиса	D. Тензорная трансформация

10.

Определение	Термин
1. Функция, которая приписывает каждому пункту многообразия тензор	A. Тензорное поле
2. Многообразие, на котором определены координаты	B. Координатное многообразие
3. Локальная структура, описывающая свойства многообразия	C. Атлас
4. Объект, который позволяет определять производные тензоров	D. Связность

11.

Определение	Термин
1. Геометрия, изучающая кривизну многообразий	A. Риманова геометрия
2. Метод, позволяющий измерять расстояния на многообразии	B. Метрика
3. Объект, описывающий кривизну многообразия	C. Тензор кривизны
4. Специальный случай римановой метрики, где кривизна постоянна	D. Гиперболическая геометрия

Критерии оценки:

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «**не зачтено**»

Решение неверное или отсутствует

