МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

**Естественнонаучный факультет**

**Кафедра математики и физики**

«УТВЕРЖДАЮ»

«_____» ____________________ 2023 г.

Зав. кафедрой ______________ Гаибов Д.С.

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

**Основы функционального анализа**

**03.03.02– Физика**

Душанбе 2023 г.

**ПАСПОРТ**
**ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине Основы функционального анализа

| № п/п | Контролируемые разделы, темы | Формируемые компетенции | Оценочные средства | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Количество заданий для зачета | Другие оценочные средства | |
| | | | | Вид | Количество |
| 1 | Тема 1. Элементы теории множеств. | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 2 | Тема 2. Отображение множеств | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 3 | Тема 3. Изометрия. Открытые и замкнутые множества, их свойства | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 4 | Тема 4. Принцип сжатых отображений (теорема С. Банаха) | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 5 | Тема 5. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 6 | Тема 6. Линейные операторы | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>2<br>2 |
| 7 | Тема 7. Базис, размерность. Понятие меры и интеграла | УК 1<br>ПК 2 | 5 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>1<br>2 |
| 8 | Тема 8. Метод итерированных ядер. Сопряженные операторы | УК 1<br>ПК 2 | 8 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>1<br>2 |
| 9 | Тема 9. Теорема о свертке, интегральное уравнение Фредгольма типа свертки | УК 1<br>ПК 2 | 7 | Выступление<br>Коллоквиум<br>Дискуссия | 2<br>1<br>2 |
| Всего: | | | 50 | 3 | 51 |

**ТЕМЫ ВЫСТУПЛЕНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ**
**Формируемые компетенции**

**УК 1-** осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

**ПК – 2** Способностью проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных

**Выступление** – речь, лекция, доклад, заявление и т.п., которые сообщаются кем-либо в устной форме.

Выступление студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов:
- творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

1. Метрические пространства, определение и основные примеры.
2. Полные и неполные метрические пространства.
3. Замкнутые, открытые, ограниченные, неограниченные, связные, несвязные подмножества метрических пространств.
4. Непрерывные отображения метрических пространств.
5. Сжимающие отображения и теорема о неподвижной точке.
6. Метрика Хаусдорфа. Фракталы как неподвижные точки сжимающих отображений.
7. Меры на конечных множествах.
8. Интегрирование функций по мере на конечных множествах.
9. Теорема Фубини для конечных множеств с мерой.
10. Цилиндрические меры на бесконечных последовательностях, состоящих из элементов фиксированного конечного множества с мерой и теоретико-вероятностный смысл таких мер.
11. Множества меры нуль на прямой и в $Rn$ .
12. Стандартная мера в $Rn$ .
13. Интеграл Лебега в $Rn$ , общая мера в $Rn$ .
14. Теорема о разложении неубывющей непрерывной слева функции в сумму функции скачков и неубывающей непрерывной функции.
15. Меры на прямой, заданные неубывающими непрерывными слева функциями.
16. Вероятностные меры.
17. Интегрирование функций по мерам, заданными неубывющими непрерывными слева функциями.
18. Вероятностный смысл интеграла по вероятностной мере.

**Требование к выступлению:**

- точность ответа на поставленный вопрос;
- формулировка целей и задач работы;
- раскрытие (определение) рассматриваемого понятия (определения, проблемы, термина);
- четкость структуры работы;
- самостоятельность, логичность изложения;
- наличие выводов, сделанных самостоятельно.

**Критерии оценки по выступлению:**

**Отметка «5»**. Выступление выполнено в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности. Работа соответствует требованию.

**Отметка «4»**. Выступление отвечает предъявленным требованиям. Допускаются отклонения от необходимой последовательности выполнения, не влияющие на правильность конечного результата.

**Отметка «3»**. Учащиеся показывают знания не в полной мере и испытывают затруднение при решении задач.

**Отметка «2»** выставляется в том случае, когда учащиеся не подготовлены к выполнению этой работы.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

### Формируемые компетенции

**УК 1-** осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

**ПК – 2** Способностью проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных

**Коллоквиум** – форма учебного занятия, понимаемая как беседа преподавателя с учащимися с целью активизации знаний.

Коллоквиум представляет собой мини-экзамен, проводимый с целью проверки и оценки знаний студентов после изучения большой темы или раздела в форме опроса или опроса с билетами.

Коллоквиум может проводиться в устной или письменной форме.

1) Исходя из определения метрики доказать, что в пространстве $R^m$ расстояние (метрику) между произвольными точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ можно ввести равенствами:

$$\text{а) } \rho(x,y) = \sqrt{\sum_1^m \alpha_i (x_i - y_i)^2},\ \alpha_i > 0;$$

$$\text{б) } \rho(x,y) = \sum_1^m \alpha_i |\ x_i - y_i\ |,\ \alpha_i > 0;$$

$$\text{в) } \rho(x,y) = \max_i (\alpha_i |\ x_i - y_i\ |),\ \alpha_i > 0.$$

2) Изобразить множество точек, которое является замкнутым (открытым) шаром в метрическом пространстве $R^2$, если метрика $\rho$ определена одним из равенств:

$$\text{а) } \rho(x,y) = \frac{1}{2}|x_1 - y_1| + \frac{1}{3}|x_2 - y_2|;$$

$$\text{б) } \rho(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4}(x_1 - y_1)^2 + \tfrac{1}{9}(x_2 - y_2)^2}\ ;$$

$$\text{в) } \rho(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2}|x_1 - y_1|, \frac{1}{3}|x_2 - y_2|\right\}$$

3) Показать, что на множестве $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ метрику можно задать равенством:

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+m}, & n \ne m \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

4) В метрике из 3) построить замкнутые шары $B\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right)$. Найти $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

5) Можно ли в пространстве $R$ (вещественная прямая) ввести метрику с помощью равенств?

а) $\rho(x,y) = \left|2^{-x} - 2^{-y}\right|$;

б) $\rho(x,y) = \left|3^{x} - 3^{y}\right|$;

в) $\rho(x,y) = \left|arctgx - arctgy\right|$;

г) $\rho(x,y) = \frac{1}{2}\left|x^3 - y^3\right|$;

д) $\rho(x,y) = \left||x| - |y|\right|$.

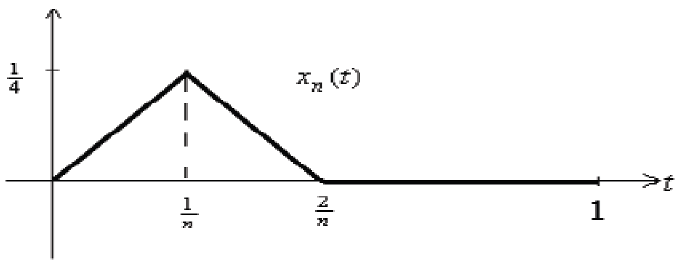
6) Доказать, что в метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность, имеющая сходящуюся подпоследовательность, сама является сходящейся.

7) На множестве непрерывных на [0, 1] функций определены метрики:

$$\rho_2(x,y) = \left(\int_0^1 \left|x(t) - y(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho\infty(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} \left|x(t) - y(t)\right|.$$

Исследовать сходимость последовательности функций $\{x_n(t)\}$ в этих метриках, где




8) Метрика $\rho$ на множестве действительных чисел $R$ задана формулой:

$$\rho(x,y) = \left|arctgx - arctgy\right|.$$

а) Показать, что пространство $(R,\rho)$ неполно;

б) Найти его пополнение.

9) Показать, что фундаментальность последовательности может не сохраняться при взаимно-однозначных непрерывных отображениях одного метрического пространства на другое.

10) Пусть $X$ полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Показать, что $Y$ как пространство с индуцированной метрикой полно только тогда, когда $Y$ замкнуто в $X$.

11) Метрика $\rho_2$ на $C[0,1]$ определена как в задаче 7). Показать, что пространство $(C[0,1],\ \rho_2)$ неполно.

12) Пусть $(X,\ \rho)$ – метрическое пространство, $A,B$ – всюду плотные множества в $X$:

а) Будут ли множества $A \cap B$, $A \cup B$ всюду плотными в $X$?

б) Показать, что если $A$, $B$ открыты и всюду плотны в $X$, то множество $A \cap B$ всюду плотно в $X$.

13) Показать, что множество ломаных на плоскости $R^2$ с углами в рациональных точках счетно. Вывести отсюда, что пространство $C[a, b]$ с метрикой

$$\rho\infty(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|$$

сепарабельно.

14) Пусть $(X,\ \rho)$ – метрическое пространство. Доказать, что если отображение $A$:$X \to X$ такое, что при некотором $n \in N$ его степень ($n$-я итерация) $A^n$ является сжимающим отображением, то $A$ имеет и притом единственную неподвижную точку.

15) Показать, что отображение

$$A : f(x) \to \frac{1}{2}\int_0^1 x\, t\, f(t)\, dt + \frac{5}{6} x$$

является сжимающим в пространстве $C[0,1]$, и найти его неподвижную точку $f^*(x)$.

**Критерии оценки коллоквиума:**

Оценка «5» - глубокое и прочное усвоение материала. Умение доказать свое решение. Демонстрация обучающимся знаний в объеме пройденной программы. Воспроизведение учебного материала с требуемой степенью точности.

Оценка «4» - наличие несущественных ошибок, уверенно исправляемых обучающимся после дополнительных и наводящих вопросов. Демонстрация обучающимся знаний в объеме пройденной программы. Четкое изложение учебного материала.

Оценка «3» - наличие несущественных ошибок в ответе, не исправляемых обучающимся. Демонстрация обучающимся недостаточно полных знаний по пройденной программе.

Оценка «2» - не знание материала пройденной темы. При ответе возникают серьезные ошибки.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДИСКУССИИ

### Формируемые компетенции

**УК 1-** осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

**ПК – 2** Способностью проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных

**Дискуссия** — обсуждение спорного вопроса, проблемы; разновидность спора, направленного на достижение истины и использующего только корректные приёмы ведения спора.

1. Замкнутые, открытые, ограниченные, неограниченные, связные, несвязные подмножества метрических пространств.
2. Непрерывные отображения метрических пространств.
3. Сжимающие отображения и теорема о неподвижной точке.
4. Метрика Хаусдорфа. Фракталы как неподвижные точки сжимающих отображений. Меры на конечных множествах.
5. Интегрирование функций по мере на конечных множествах.
6. Теорема Фубини для конечных множеств с мерой.
7. Цилиндрические меры на бесконечных последовательностях, состоящих из элементов фиксированного конечного множества с мерой и теоретико-вероятностный смысл таких мер.
8. Множества меры нуль на прямой и в $Rn$ . Стандартная мера в $Rn$ .
9. Интеграл Лебега в $Rn$ , общая мера в $Rn$ .
10. Теорема о разложении неубывющей непрерывной слева функции в сумму функции скачков и неубывающей непрерывной функции.
11. Меры на прямой, заданные неубывающими непрерывными слева функциями.
12. Вероятностные меры. Интегрирование функций по мерам, заданными неубывающими непрерывными слева функциями.
13. Вероятностный смысл интеграла по вероятностной мере.
14. Нормированные пространства, определение и основные примеры.
15. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.
16. Банаховы пространства.
17. Гильбертовы пространства.
18. Базис гильбертова пространства.

**Критерии оценки дискуссии:**

1. Оценка «отлично» выставляется студенту, если он активно принимал участие в дискуссии и отвечал на вопросы полным ответом с доказательством и решением безошибочно.
2. Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он активно учувствовал в дискуссии, но у него были несущественные ошибки, которые он потом исправлял.
3. Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он не учувствовал в дискуссии добровольно, а при вызывании к доске отвечал не в полной мере.
4. Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не учувствовал в дискуссии, а при вызывании к доске не мог ничего ответить.

## ЗАДАНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ЭКЗАМЕН)

**УК 1-** осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

**ПК – 2** Способностью проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных

1. Покажите метрику пространства $\widetilde{M}[0, 1]$-ограниченных измеримых функций, если $x(t),\ y(t),\ z(t),\ \ldots,$ – измеримые на [0, 1] функции, существенные максимумам которых конечны.
2. Покажите метрику пространства $S[0, 1]$-сходности по мере, если $x(t),\ y(t)$ – измеримые функции определенные на отрезке [0, 1].

3. Покажите метрику пространства $L_p[0, 1]$-функций с интегрируемой *p*-й степенью, если $x(t),\ y(t) \in L_p[0, 1]$.

4. Покажите метрику пространства $L_p(p \geq 1)$-числовых последовательностей, если $x = \{\xi_1,\ \xi_1,\ ...,\ \xi_n,\ ...\},\ y = \{\eta_1,\ \eta_1,\ ...,\ \eta_n,\ ...\} \in l_p$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства *x* называется сходящийся в себе или фундаментальной последовательностью, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $\eta_0(\varepsilon)$ такой, что при $m \geq n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство.

6. Пусть $f(x): L_p[0, 1] \to R$ и $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$. Покажите, что линейный функционал *f* (*x*) ограничен

7. Пусть $x = \{\ \xi_i\ \} \in E_k$ – k-мерное евклидово пространство и *f* (*x*) $= \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \xi_i$, где $c_i,\ i = 1,\ ...,\ k$ константы. Доказать непрерывность *f* (*x*).

8. Теорема. Пусть линейный ограниченный оператор *A* отображает *E* в *E* и $\| A \| \leq q < 1$. Тогда оператор I + A имеет…

9. Пусть оператор $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$ и $Ax = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$. Найти обратный оператор.

10. Пусть $E = C[0, 1]$ и $Ax = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ – ограниченный линейный оператор, тогда оператор $A^{-1}y = \dfrac{d}{dt}y(t)$…

11. Пусть $E = C[0, 1]$ и $Ax = \dfrac{d}{dt}\left\{P(t)\dfrac{dx}{dt}\right\} + q(t)x$ – неограниченный оператор на линейном многообразии дважды непрерывно дифференцируемых функций таких, что *x* (0) = *x* (1) = 0. Написать решение уравнения *Ax* = *y* в виде интегрального представления.

12. Пусть $E = C[0, 1]$ и $Ax = \dfrac{d}{dt}\left\{P(t)\dfrac{dx}{dt}\right\} + q(t)x,\ \|Ax\| \geq m\|x\|,\ m = const$, $D(A) = \{x : x \in L \subset C^2[0, 1],\ k(0) = x(1) = 0\}$. Тогда обратный оператор $A^{-1}y = \int\limits_0^1 G(t,\ \tau)y(\tau)d\tau$, где $G(t,\ \tau)$ – функция Грина, есть какое условие?

13. Покажите метрику пространства непрерывных функций с чебышевской метрикой $C[0, 1]$.

14. Покажите метрику *m*-ограниченных числовых последовательностей, если $x = \{\xi_i\},\ y = \{\eta_i\} \in X$, где *X* – множество ограниченных числовых последовательностей $x = \{\xi_1,\ \xi_1,\ ...,\ \xi_n,\ ...\},\ |\xi_i| \leq k_x > 0$ для всех *i*.

15. Покажите метрику пространства *c*-сходящихся числовых последовательностей, если $x=\{\xi_1,\ \xi_1,\ ...,\ \xi_n,\ ...\},\ y=\{\eta_1,\ \eta_1,\ ...,\ \eta_n,\ ...\}\in c$, причем $\lim_i \xi_i=\xi,\ \lim_i \eta_i=\eta$.

16. Покажите метрику пространства *M* [0, 1]-ограниченных вещественных функций, если $x=x(t),\ y=y(t)$ – ограниченные вещественные функции заданных на отрезке [0, 1].

17. Покажите метрику пространства $\widetilde{M}[0,\ 1]$-ограниченных измеримых функций, если $x(t),\ y(t),\ z(t),\ ...,$ – измеримые на [0, 1] функции, существенные максимумам которых конечны.

18. Покажите метрику пространства $S[0,\ 1]$-сходности по мере, если $x(t),\ y(t)$ – измеримые функции определенные на отрезке [0, 1].

19. Покажите метрику пространства $L_p[0,\ 1]$-функций с интегрируемой *p*-й степенью, если $x(t),\ y(t)\in L_p[0,\ 1]$.

20. Покажите метрику пространства $L_p(p\geq 1)$-числовых последовательностей, если $x=\{\xi_1,\ \xi_1,\ ...,\ \xi_n,\ ...\},\ y=\{\eta_1,\ \eta_1,\ ...,\ \eta_n,\ ...\}\in l_p$.

21. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства *x* называется сходящийся в себе или фундаментальной последовательностью, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется номер $\eta_0(\varepsilon)$ такой, что при $m\geq n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство.

22. Покажите неравенство Бесселя

23. Покажите равенство Парсеваля-Стеклова

24. По равенству $\iint\limits_G \frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\varphi(x,\ y)dx\,dy=(-1)^l\iint\limits_G \psi(x,\ y)\chi(x,\ y)dx\,dy$, определить обобщенный производную *l*-го порядка функции $\varphi(x,\ y)$

25. Какие из формул вложения Соболева верны:

26. Оператор $y=Ax,$ где $A:E_k\rightarrow E_y$ называется линейным, есл

27. Показать многочлен от оператора *A*

28. Нормой оператора *A* (обозначается $\|A\|$) называется наименьшая из постоянных *M*, удовлетворяющих условию

29. Пусть $Ax=\int\limits_0^1 k(t,\ s)x(s)ds$. Найти норму оператора $A:C[0,\ 1]\rightarrow C[0,\ 1]$.

30. Оператор *A* называется ограниченным на линейное многообразие L заданное в линейном нормированном пространстве $E_x$, если существует постоянная *M* такая, что для всех $x\subset L$ выполняется условие

31. Пусть $f(x):L_p[0,\ 1]\rightarrow R$ и $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)dt$. Покажите, что линейный функционал *f* (*x*) ограничен

32. Пусть $x=\{\ \xi_i\ \}\in E_k$ – k-мерное евклидово пространство и *f* (*x*) $=\sum\limits_{i=1}^{k} c_i\xi_i$, где $c_i,\ i=1,\ ...,\ k$ константы. Доказать непрерывность *f* (*x*).

33. Теорема. Пусть линейный ограниченный оператор $A$ отображает $E$ в $E$ и $\|A\| \le q < 1$. Тогда оператор I + A имеет…

34. Теорема (Банаха). Если линейный ограниченный оператор $A$ отображает все банахово пространство $E_x$ на все банахово пространство $E_y$ взаимно однозначно, то существует линейный ограниченный оператор $A^{-1}$,

35. Пусть оператор $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$ и $Ax = \int_0^t x(\tau)d\tau$. Найти обратный оператор.

36. Пусть $E = C[0, 1]$ и $Ax = \int_0^t x(\tau)d\tau$ – ограниченный линейный оператор, тогда оператор $A^{-1}y = \frac{d}{dt}y(t)$…

37. Пусть $E = C[0, 1]$ и $Ax = \frac{d}{dt}\left\{P(t)\frac{dx}{dt}\right\} + q(t)x$ – неограниченный оператор на линейном многообразии дважды непрерывно дифференцируемых функций таких, что $x$ (0) = $x$ (1) = 0. Написать решение уравнения $Ax = y$ в виде интегрального представления.

38. Пусть $E = C[0, 1]$ $Ax = \frac{d}{dt}\left\{P(t)\frac{dx}{dt}\right\} + q(t)x,\ \|Ax\| \ge m\|x\|,\ m = const$,
$D(A) = \{x : x \in L \subset C^2[0, 1],\ k(0) = x(1) = 0\}$. Тогда обратный оператор
$A^{-1}y = \int_0^1 G(t, \tau)y(\tau)d\tau$, где $G(t, \tau)$ – функция Грина, есть

39. Спектром оператора $A$ называется

40. Покажите резольвенту оператора $A: X \to X$, X – банахово пространство, $\overline{D(A)} = X$ .

41. Точка $\lambda$ называется регулярной точкой оператора $A$, если оператор $A - \lambda I$ .

42. Покажите неравенство Гельдера.

43. Покажите неравенство Минковского.

44. Оператор $A: E_x \to E_y$ называется функционалом, если

45. Оператор $A: E_x \to E_y$ пусть $\varphi(y)$ – линейный функционал, определенный на $E_y$ . Для $y = Ax$ $\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$, тогда какое уравнение выражает сопряженный оператор $A$*.

46. Как записывается связь между операторами $A$ и $A$*

47. Покажите неравенство Коши-Буняковского

48. Покажите скалярное произведение в пространстве $L_2[a, b]$

49. Покажите норму функций $u$ ($x$) в пространстве Соболева $W_p^e(G)$

50. Покажите метрику $n$-мерного Евклидово пространство $E_n$, если $x = \{\xi_1, \xi_1, ..., \xi_n\},\ y = \{\eta_1, \eta_1, ..., \eta_n\},$.

Итоговая форма контроля по дисциплине экзамен проводится в традиционной форме, путем решения задач.

**Разработчик: к.ф-м.н., доцент Гоибов Д.С.________________**

**« » ___________ 2023г**