МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
«29» августа 2025 г.
Зав. кафедрой ________ Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине (модулю)

«**Дополнительные главы высшей алгебры**»
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»
Форма подготовки - очная
Уровень подготовки - магистр

Душанбе – 2025

ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы высшей алгебры»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы, модули	Формируемые компетенции	Оценочные средства		
			Количество тестовых заданий	Другие оценочные средства	
				Вид	Количество
1.	Теория колец и модулей: основы теории колец и модулей. Кольца главных идеалов	ОПК-1, ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	3 8
2.	Теория полей: расширения полей, конечные поля. Теория Галуа: основная теорема теории Галуа, группа Галуа многочленов и примеры ее вычислений, приложения теории Галуа.	ОПК-1, ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	3 6
3.	Теория представлений: элементы теории представлений конечных групп, теорема Машке, элементы теории характеров, колчаны и их представления.	ОПК-1, ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	3 10
4.	Целые алгебраические числа. Дедекиндовы кольца. Теория идеалов	ОПК-1, ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	3 8
Всего:					44

МОУ ВО «РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ» (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы высшей алгебры»

Формируемые компетенции

код	**Формируемая компетенция**	**Этапы формирования компетенции**	**Содержание этапа формирования компетенции**	**Вид оценочного средства**
ОПК-1	способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	Начальный этап (знания)	Знает/ИОПК-1.1: n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИОПК-1.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.
		Завершающий этап (умения)	Владеет/ ИОПК-1.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы
ПК-2	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, управлению научным коллективом	Начальный этап (знания)	Знает/ИПК-2.1: n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИПК-2.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.
		Завершающий этап (умения)	Владеет/ ИПК-2.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы

1. Определение группы. Подгруппы. Примеры.

2. Группа самосовмещений правильного многоугольника (на примере треугольника).
3. Группа перестановок. Таблица Кэли для группы перестановок трех элементов.
4. Свойства групп. Изоморфные группы. Примеры.
5. Смежные классы. Нормальные делители группы.
6. Гомоморфизмы групп. Фактор-группа.
7. Теоремы о гомоморфизмах групп.
8. Группы линейных преобразований. Ортогональная группа, группа Лоренца.
9. Линейные представления групп. Приводимые и неприводимые представления. Примеры.
10. Абелевы алгебры
11. Кольцоиды
12. Структуры
13. Полные структуры
14. Соответствие универсальных алгебр
15. Конгруенции

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если

студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «**не зачтено**»

Решение неверное или отсутствует

МОУ ВО «РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ» (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы высшей алгебры»

Формируемые компетенции

код	**Формируемая компетенция**	**Этапы формирования компетенции**	**Содержание этапа формирования компетенции**	**Вид оценочного средства**
ОПК-1	способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	Начальный этап (знания)	Знает/ИОПК-1.1: n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИОПК-1.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.
		Завершающий этап (умения)	Владеет/ ИОПК-1.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Тестирование
ПК-2	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ,	Начальный этап (знания)	Знает/ИПК-2.1: n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИПК-2.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.

	управлению научным коллективом	Заверша ющий этап (умения)	Владеет/ ИПК-2.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Тестиро вание

Самостоятельная работа №1

1. В п. 2 в качестве примера на $\mathbb{Z}$ вводилась операция $*$: $n*m=-n-m$, коммутативная, но неассоциативная. В алгебраической структуре $(\mathbb{Z},*)$ выполняются соотношения $(n*m)*m=n$, $m*(m*n)=n$. Пусть теперь нам дана произвольная алгебраическая структура $(X,*)$, в которой $(x*y)*y=x$, $y*(y*x)=x$ для любых $x,y\in X$. Доказать, что $x*y=y*x$, т.е. операция $*$ коммутативна. Никаких указаний к решению не даётся, поскольку это одно из самых бесполезных упражнений в книге. Но все-таки!

2. Показать, что множество

$$M_n^0(\mathbb{R})=\left\{A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})\;\middle|\;\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\quad i=1,2,\ldots,n\right\}$$

с обычной операцией умножения матриц является полугруппой. Является ли $(M_n^0(\mathbb{R}),\cdot)$ моноидом?

3. В мультипликативном моноиде M выбирается произвольный элемент t и вводится новая операция $*$: $x*y=xty$. Показать, что $(M,*)$ — полугруппа и что обратимость элемента t в M — необходимое и достаточное условие, при выполнении которого $(M,*)$ — моноид с нейтральным (единичным) элементом t^{-1}.

4. Показать, что множество $\mathbb{Z}$ с операцией $\circ$: $n\circ m=n+m+nm=(1+n)\times\times(1+m)-1$, является коммутативным моноидом. Что служит в $(\mathbb{Z},\circ)$ нейтральным элементом? Найти в $(\mathbb{Z},\circ)$ все обратимые элементы.

Самостоятельная работа №2

1. Доказать, что пересечение $\bigcap_{i\in I} H_i$; любого семейства $\{H_i | i \in I\}$ подгрупп группы G является подгруппой.

2. Говорят, что группа G порождается подмножеством S своих элементов, и пишут $G = \langle S \rangle$, если пересечение всех подгрупп H, содержащих S, совпадает с G (другими словами, в G нет хотя бы одной собственной подгруппы, содержащей S). Показать, что в случае $G = \langle S \rangle$ каждый элемент $g \in G$ имеет вид $g = t_1 t_2 \dots t_n, n = 1, 2, \dots$, где либо $t_i \in S$, либо $t_i^{-1} \in S$, $1 \leqslant t \leqslant n$.

3. Показать, что перестановочные элементы a, b произвольной группы G, имеющие взаимно простые порядки s, t, порождают в G циклическую подгруппу порядка $st : \langle a, b \rangle = \langle ab \rangle$.

4. Показать, что если $M = \langle S \rangle$ — моноид, порождённый множеством S, и каждый элемент $s \in S$ обратим в M, то M — группа.

5. Группа — это моноид G, в котором уравнения вида $ax = b$, $ya = b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in G$. Доказать это утверждение.

6. Показать, что множество $A_1(\mathbb{R})$ так называемых *аффинных преобразований* $\varphi_{a,b} : x \mapsto ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ образует группу с законом умножения $\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} = \varphi_{ac,ad+b}$. В группе $A_1(\mathbb{R})$ содержится подгруппа $GL_1(\mathbb{R})$, оставляющая точку $x = 0$ на месте, и подгруппа "чистых сдвигов" $x \mapsto x + b$.

7. Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ содержит элементы $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$ порядков 4 и 3 соответственно. Показать, что $\langle AB \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Таким образом, произведение двух элементов конечного порядка в группе G не обязано быть элементом конечного порядка. А как обстоит дело в абелевой группе?

8. Доказать, что группа G чётного порядка $|G| = 2n$ обязательно содержит элемент $g \neq e$ порядка 2.

Самостоятельная работа №3

1. Развивая идею примера 2 из § 1, показать, что множество $\mathcal{P}(\Omega)$ с операциями

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \qquad AB = A \cap B, \qquad A, B \in \Omega,$$

является кольцом с единицей, все элементы аддитивной группы которого имеют порядок 2.

2. Установить коммутативность произвольного кольца, в котором каждый элемент x удовлетворяет уравнению $x^2 = x$. Верно ли это при условии $x^3 = x$?

3. Изоморфны ли поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{5})$?

4. Показать, что эпиморфный образ коммутативного кольца является коммутативным кольцом.

5. Показать, что любое конечное целостное кольцо K является полем.

6. Пусть p — простое число и K — коммутативное кольцо с единицей такое, что $px = 0$ для всех $x \in K$. Показать, что тогда

$$(x + y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m}, \qquad m = 1, 2, \dots$$

Указание. Использовать индукцию по m и то обстоятельство, что биномиальный коэффициент $\binom{p}{k}$, $0 < k < p$, делится на p.

7. Доказать, что кольцо K, состоящее из пяти элементов, либо изоморфно $\mathbb{Z}_5$, либо является кольцом с нулевым умножением.

Самостоятельная работа №4

1. Вспомним определение из [BA I, гл. 4, § 2, п. 4] внутреннего автоморфизма $I_a : g \mapsto aga^{-1}$ и группы $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$. Показать, что $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ и $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Факторгруппа $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ называется *группой внешних автоморфизмов.*

2. Пусть H и K — подгруппы группы G. Показать, что

$$|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$$

(аналог формулы, известной из теории линейных пространств). Показать, далее, что множество HK будет подгруппой тогда и только тогда, когда $HK = KH$; в случае $K \lhd G$ это условие автоматически выполняется.

3. Составим для симметрической группы S_4 таблицу

1	3	6	8	6
e	(12)(34)	(12)	(123)	(1234)

,

аналогичную тем, которые мы использовали в только что рассмотренных примерах. Опираясь на достаточно очевидное соображение, что в любой группе нормальная подгруппа есть объединение некоторого множества сопряжённых классов, повторить данное нами в примере 2 описание нормальных подгрупп группы S_4.

4. Показать, что $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$.

5. Если $K_1, K_2 \lhd G$, $K_1 \cap K_2 = e$, то G изоморфна некоторой подгруппе в $(G/K_1) \times (G/K_2)$. Верно ли это?

6. Пусть $K \lhd G = A \times B$. Доказать, что либо подгруппа K абелева, либо одно из пересечений $K \cap A$, $K \cap B$ нетривиально. Дать пример группы $A \times B$ с нетривиальной нормальной подгруппой K такой, что $K \cap A = e$ и $K \cap B = e$. Тем самым из $K \lhd A \times B$, вообще говоря, не следует, что $K = (K \cap A) \times (K \cap B)$.

7. Является ли группа кватернионов Q_8 полупрямым произведением каких-то двух своих собственных подгрупп?

Самостоятельная работа №5

1. При помощи формулы (6) и таблиц из п. 1 § 2, п. 2 § 5, п. 4 § 5 проверить, что справедливы разложения

$$\Phi^{(3)} \otimes \Phi^{(3)} \approx \Phi^{(1)} \dot{+} \Phi^{(2)} \dot{+} \Phi^{(3)}$$

для тензорного квадрата двумерного представления $\Phi^{(3)}$ симметрической группы S_3 и

$$\Phi^{(5)} \otimes \Phi^{(5)} \approx \Phi^{(1)} \dot{+} \Phi^{(2)} \dot{+} \Phi^{(3)} \dot{+} \Phi^{(4)}$$

для тензорного квадрата двумерного представления $\Phi^{(5)}$ группы кватернионов Q_8.

2. *Представления прямого произведения групп.* Пусть имеются две группы G, H с линейными представлениями (Φ, V), (Ψ, W). Тогда, полагая

$$(\Phi \otimes \Psi)(g \cdot h) = \Phi(g) \otimes \Psi(h),$$

где $g \cdot h$ — элемент прямого произведения $G \times H$ групп G, H, мы заставим $G \times H$ действовать на тензорном произведении $V \otimes_{\mathbb{C}} W$; как обычно,

$$(\Phi(g) \otimes \Psi(h))(v \otimes w) = \Phi(g)v \otimes \Psi(h)w.$$

Проверить, что так определённое отображение

$$\Phi \otimes \Psi \colon\ G \times H \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$$

является представлением группы $G \times H$ с характером $\chi_{\Phi\otimes\Psi} = \chi_\Phi \chi_\Psi$. Доказать следующее утверждение. Пусть $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}$ (соответственно $\Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(s)}$) — все неприводимые представления группы G (соответственно H). Тогда представления $\Phi^{(i)} \otimes \Psi^{(j)}$ группы $G \times H$ неприводимы, и все неприводимые представления группы $G \times H$ исчерпываются представлениями

$$\Phi^{(i)} \otimes \Psi^{(j)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,\ \ 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Самостоятельная работа №6

1. Пусть G, H — конечные группы с сильно жёсткими семействами

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m), \qquad \widetilde{\mathbb{S}}(\mathcal{K}'_1, \ldots, \mathcal{K}'_{m'}).$$

Показать, что тогда

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\mathcal{K}_i \times \mathcal{K}'_j \mid\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m')$$

— сильно жёсткое семейство в $G \times H$.

2. Пусть σ — внешний автоморфизм конечной группы, и пусть $(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m)$ — жёсткое семейство классов сопряжённости в G. Показать, что тогда $\sigma(\mathcal{K}_i) \neq \mathcal{K}_i$ для некоторого i.

3. Показать, что в знакопеременной группе A_5 с известными нам классами сопряжённости $1A, 2A, 3A, 5A, 5B$ тройки

$$(2A, 3A, 5A), \quad (2A, 5A, 5B), \quad (3A, 5A, 5B)$$

являются сильно жёсткими. Отсюда следует, что $A_5 \cong \mathrm{Gal}\, F/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

4. Обозначим через $K_1(z)$ число представлений элемента z конечной группы G в виде коммутатора, т.е. число решений уравнения $z = xyx^{-1}y^{-1}$. Показать, что

$$K_1(z) = |G| \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(z)}{\chi_i(e)}.$$

Более общо: если $K_m(z)$ — число решений уравнения

$$z = (x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1})(x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}) \ldots (x_m y_m x_m^{-1} y_m^{-1}),$$

то

$$K_m(z) = |G|^{2m-1} \sum_i \frac{\chi_i(z)}{\chi_i(e)^{2m-1}}.$$

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:
1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
3) излагает материал последовательно и правильно.
- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.
- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:
1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.
- оценка «**неудовлетворительно**», если
студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если
Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.
- оценка «**не зачтено**»
Решение неверное или отсутствует

Итоговая система оценок по кредитно-рейтинговой системе с использованием буквенных символов

Оценка по буквенной системе	Диапазон соответствующих наборных баллов	Численное выражение оценочного балла	Оценка по традиционной системе
A	10	95-100	Отлично
A-	9	90-94	
B+	8	85-89	Хорошо
B	7	80-84	
B-	6	75-79	
C+	5	70-74	Удовлетворительно
C	4	65-69	
C-	3	60-64	
D+	2	55-59	
D	1	50-54	
Fx	0	45-49	Неудовлетворительно

Составитель ________________________Исроилов С.И.