

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
«28» августа 2024 г.
Заведующий кафедрой
математики и физики



Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Интегральные уравнения и теория операторов»
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»
Форма подготовки - очная
Уровень подготовки - магистратура

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции *	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства
					Вид
1.	Введение	ПК-1	ИПК-1.1. Знает современные проблемы математики; современное состояние исследуемой проблемы; методы проведения исследований в области математики	8	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Гильбертово пространство	ПК-1	ИПК-1.2. Умеет видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения.	8	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Линейные операторы в гильбертовом пространстве	ПК-1	ИПК-1.3. Владеет - способностью к интенсивной научно-исследовательской работе; адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы.	8	Перечень вопросов для устного опроса
4.	Спектр операторов	ПК-1	ИПК-1.1. Знает современные проблемы математики; современное состояние исследуемой проблемы; методы проведения	8	Перечень вопросов для устного опроса

			исследований в области математики		
5.	Интегральные уравнения	ПК-1	ИПК-1.2. Умеет видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения.	8	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Понятие функционала, теорема Рисса	ПК-1	ИПК-1.3. Владеет - способностью к интенсивной научно-исследовательской работе; адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы.	8	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				48	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

1. δ - функция Дирака, определения и свойства.
2. Производные от δ - функции.
3. Функции Чебышева-Эрмита. Функции Лагерра.
4. Базис, размерность пространства. Евклидовы пространства, свойства скалярного произведения, норма, ортонормированный базис.
5. Гильбертово пространство и его размерность. Понятие кет - и бра-векторов.
6. Оснащенное гильбертово пространство, критерий для дополнительных векторов, непрерывный базис.
7. Понятие оператора, абстрактные операторы и их представители. Линейные операторы.
8. Алгебраические операции с операторами: равенство, сложение, умножение, возведение в степень.
9. Обратный оператор, особенные и неособенные операторы и их свойства.
10. Функция от операторов.
11. Представление операторов, матричный элемент, интегральный оператор, ядро и его свойства.
12. Сопряженные операторы и их свойства. Нахождение сопряженных операторов.
13. Эрмитовы операторы и их свойства.

14. Унитарные операторы и их свойства. Унитарное преобразование.
15. Определение собственных векторов и собственных значений, вырождение. Спектр оператора.
16. Собственные вектора и собственные значения эрмитовых операторов. Дискретные и непрерывные спектры.
17. Интегральные уравнения: основные определения, классификация.
18. Интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода.
19. Задача Штурма-Лиувилля.
20. Интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода.
21. Понятие функционала и его вариации
22. Линейные функционалы, теорема Рисса.

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

1.

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Фредгольма?

- A) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$
- B) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy + f(x)$
- C) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$
- D) $u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$

2.

Какой метод используется для решения интегральных уравнений, если известна форма ядра?

- A) Метод Рунге-Кутты
- B) Метод итераций
- C) Метод конечных разностей
- D) Метод Гаусса

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Волтерра?

- A) $u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy$
- B) $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y) dy$
- C) $u(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$
- D) $u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy + g(x)$

3.

Какое из следующих свойств является характерным для гильбертового пространства?

- A) Наличие только одной нормы
- B) Полнота относительно заданной метрики
- C) Непрерывность всех линейных операторов
- D) Наличие только конечномерных подпространств

4.

Какой из следующих элементов является базисом в гильбертовом пространстве?

- A) Конечное множество векторов
- B) Линейная комбинация векторов
- C) Ортонормированный набор векторов
- D) Набор из двух векторов

5.

Как называется скалярное произведение в гильбертовом пространстве?

- A) Норма
- B) Мера
- C) Операция
- D) Интеграл

6.

Какой из следующих операторов является линейным?

- A) $T(f + g) = Tf + Tg$
- B) $T(cf) = cTf$
- C) $T(f) = f^2$
- D) Все вышеперечисленные

7.

Какой из следующих операторов является ограниченным?

- A) Оператор, который не сохраняет нормы
- B) Оператор, для которого существует константа C , такая что $\|Tf\| \leq C\|f\|$
- C) Оператор, который не имеет собственных значений
- D) Оператор, который является неограниченным

8.

Какое из следующих свойств не относится к компактным операторам в гильбертовом пространстве?

- A) Сохраняют ограниченность
- B) Приводят ограниченные множества к предкомпактным
- C) Имеют собственные значения, стремящиеся к нулю
- D) Являются непрерывными

9.

Какой из следующих типов спектра относится к оператору?

- A) Дискретный спектр
- B) Непрерывный спектр
- C) Смешанный спектр
- D) Все вышеперечисленные

10.

Какой из следующих операторов может иметь пустой спектр?

- A) Компактный оператор
- B) Непрерывный оператор
- C) Невырожденный оператор
- D) Никакой из вышеперечисленных

11.

Какое из следующих утверждений о спектре операторов является верным?

- A) Спектр всегда конечен
- B) Спектр может быть пустым
- C) Спектр всегда состоит из собственных значений
- D) Спектр всегда включает 0

12.

Какой из следующих типов интегральных уравнений используется для моделирования физических процессов?

- A) Интегральные уравнения Фредгольма
- B) Интегральные уравнения Вольтерра
- C) Линейные интегральные уравнения
- D) Все вышеперечисленные

13.

Какое ядро называется симметричным в интегральном уравнении?

- A) $K(x, y) = K(y, x)$
- B) $K(x, y) = -K(y, x)$
- C) $K(x, y) = K(x, y)$
- D) $K(x, y) = 0$

14.

Какой метод используется для численного решения интегральных уравнений?

- A) Метод Монте-Карло
- B) Метод конечных элементов
- C) Метод итераций
- D) Все вышеперечисленные

15.

Какое из следующих определений является правильным для линейного функционала?

- A) $L(x + y) = L(x) + L(y)$
- B) $L(cx) = cL(x)$
- C) $L(x)$ может быть представлено в виде скалярного произведения
- D) Все вышеперечисленные

16.

Какое из следующих утверждений является следствием теоремы Рисса?

- A) Существование непрерывного линейного функционала на замкнутом подмножестве
- B) Существование компактного оператора
- C) Существование собственных значений
- D) Существование базиса в пространстве

17.

Какой из следующих типов интегральных уравнений является уравнением Фредгольма?

- A) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$
- B) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy + f(x)$
- C) $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$
- D) $u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y) dy$

18.

Какое из следующих свойств является характерным для гильбертового пространства?

- A) Наличие только одной нормы
- B) Полнота относительно заданной метрики
- C) Непрерывность всех линейных операторов
- D) Наличие только конечномерных подпространств

19.

Какой из следующих функционалов является непрерывным?

- A) $L(x) = \|x\|^2$
- B) $L(x) = x^2$
- C) $L(x) = \langle x, y \rangle$
- D) $L(x) = \frac{1}{x}$

20.

Какой из следующих операторов является линейным?

- A) $T(f + g) = Tf + Tg$
- B) $T(cf) = cTf$
- C) $T(f) = f^2$
- D) Все вышеперечисленные

21.

Какой из следующих типов спектра относится к оператору?

- A) Дискретный спектр
- B) Непрерывный спектр
- C) Смешанный спектр
- D) Все вышеперечисленные

22.

Какое из следующих определений является правильным для линейного функционала?

- A) $L(x + y) = L(x) + L(y)$
- B) $L(cx) = cL(x)$
- C) $L(x)$ может быть представлено в виде скалярного произведения
- D) Все вышеперечисленные

23.

Какой из следующих типов интегральных уравнений используется для моделирования физических процессов?

- A) Интегральные уравнения Фредгольма
- B) Интегральные уравнения Волтерра
- C) Линейные интегральные уравнения
- D) Все вышеперечисленные

24.

Какое ядро называется симметричным в интегральном уравнении?

- A) $K(x, y) = K(y, x)$
- B) $K(x, y) = -K(y, x)$
- C) $K(x, y) = K(x, y)$
- D) $K(x, y) = 0$

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И НА СООТВЕТСТВИЕ по дисциплине «Интегральные уравнения и теория операторов»

Задания открытого типа:

1.

Опишите классификацию интегральных уравнений. Включите в ответ определения уравнений Фредгольма и Волтерра, а также приведите примеры методов их решения.

2.

Что такое гильбертово пространство? Перечислите его основные свойства и приведите примеры.

3.

Определите, что такое линейный оператор в гильбертовом пространстве. Приведите примеры линейных операторов и обсудите их свойства.

4.

Опишите понятие спектра линейного оператора. Каковы основные виды спектра и их характеристики?

5.

Каковы основные методы решения интегральных уравнений? Приведите примеры и объясните их применение.

6.

Что такое линейный функционал? Объясните теорему Рисса и её значение в функциональном анализе.

7.

Опишите основные отличия между интегральными уравнениями Фредгольма и Волтерра. Приведите примеры для каждого типа уравнений и укажите, какие методы могут быть использованы для их решения.

8.

Что такое гильбертово пространство и какие его основные свойства? Приведите примеры гильбертовых пространств и объясните, как они применяются в функциональном анализе.

9.

Что такое спектр оператора в гильбертовом пространстве? Опишите основные виды спектра и их характеристики.

10.

Опишите свойства линейных операторов в гильбертовом пространстве. Какие условия необходимы для того, чтобы оператор считался ограниченным?

11.

Объясните, что такое интегральные уравнения и какие методы используются для их решения. Приведите примеры интегральных уравнений и их приложений.

12.

Что такое функционал и какова его роль в функциональном анализе? Объясните теорему Рисса и её значение.

Задания на соответствие:

1.

Определение	Тип интегрального уравнения
1. Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком интеграла и зависит от независимой переменной	А. Уравнение Фредгольма
2. Уравнение, где известная функция добавляется к интегралу	В. Уравнение Волтерра
3. Уравнение, в котором ядро зависит от двух переменных	С. Линейное интегральное уравнение

2.

Определение	Свойство гильбертового пространства
1. Пространство, в котором определено скалярное произведение	A. Полнота
2. Набор векторов, который является ортонормированным	B. Ортонормированный базис
3. Пространство, в котором любые две функции могут быть представлены как линейные комбинации	C. Линейная структура
3.	

Определение	Тип оператора
1. Оператор, который сохраняет линейность и ограниченность	A. Линейный оператор
2. Оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные	B. Компактный оператор
3. Оператор, который не имеет собственных значений	C. Неограниченный оператор
4.	

Определение	Тип спектра
1. Множество всех собственных значений оператора	A. Дискретный спектр
2. Множество, включающее в себя все значения, которые могут быть получены из оператора	B. Непрерывный спектр
3. Спектр, который не содержит точек	C. Пустой спектр
5.	

Определение	Тип интегрального уравнения
1. Уравнение, где ядро симметрично по своим аргументам	A. Симметричное интегральное уравнение
2. Уравнение, в котором интегрируется произведение функции и ядра	B. Линейное интегральное уравнение
3. Уравнение, в котором присутствует функция, зависящая от одной переменной	C. Интегральное уравнение Фредгольма
6.	

Определение	Свойство
1. Отображение, которое сопоставляет каждому вектору скаляр	A. Линейный функционал
2. Утверждение о существовании непрерывного линейного функционала	B. Теорема Рисса
3. Отображение, которое не является линейным	C. Нелинейный функционал

7.

Определение	Термин
1. Уравнение, в котором функция выражается через интеграл от своего значения.	A. Интегральное уравнение Фредгольма
2. Уравнение, в котором функция зависит от себя через интеграл.	B. Интегральное уравнение Волтерра
3. Метод, основанный на последовательном приближении решения.	C. Метод итераций
4. Уравнение, в котором ядро не зависит от одной из переменных.	D. Линейное интегральное уравнение

8.

Определение	Термин
1. Пространство, в котором определено скалярное произведение.	A. Гильбертово пространство
2. Свойство, при котором каждая последовательность Коши сходится.	B. Полнота
3. Набор векторов, который является базисом в пространстве.	C. Ортонормированный базис
4. Пример пространства, состоящего из всех квадратируемых функций.	D. Пространство L^2

9.

Определение

1. Оператор, который сохраняет линейные комбинации.
2. Оператор, для которого существует константа C , такая что $\|Tf\| \leq C\|f\|$.
3. Оператор, который не имеет собственных значений.
4. Оператор, который переводит ограниченные множества в предкомпактные.

Термин

- A. Линейный оператор
- B. Ограниченный оператор
- C. Невырожденный оператор
- D. Компактный оператор

10.

Определение

1. Набор собственных значений оператора.
2. Спектр, состоящий из дискретных значений.
3. Спектр, который включает в себя все значения, кроме нуля.
4. Спектр, который может быть пустым.

Термин

- A. Спектр
- B. Дискретный спектр
- C. Непрерывный спектр
- D. Пустой спектр

11.

Определение

1. Уравнение, в котором функция выражается через интеграл от других функций.
2. Ядро, которое симметрично по своим аргументам.
3. Метод, используемый для численного решения интегральных уравнений.
4. Уравнение, в котором интеграл зависит от фиксированной переменной.

Термин

- A. Интегральное уравнение
- B. Симметричное ядро
- C. Метод конечных элементов
- D. Интегральное уравнение Вольтерра

12.

Определение	Термин
1. Отображение из векторного пространства в поле чисел.	A. Линейный функционал
2. Теорема, утверждающая существование непрерывного линейного функционала.	B. Теорема Рисса
3. Функционал, который сохраняет линейные комбинации.	C. Непрерывный функционал
4. Пространство, в котором определены все линейные функционалы.	D. Пространство двойственного функционала

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Составитель:  Курбанов И.