МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

Естественнонаучный факультет

Кафедра математики и физики

«УТВЕРЖДАЮ»
«28» 08 2024 г.
Зав. кафедрой ________ Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

Теория разделимости дифференциальных операторов

01.03.01– Математика

профиль «Общая математика»

Душанбе 2024г.

ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине Теория разделимости дифференциальных операторов

№ п/п	Контролируемые разделы, темы	Формируемые компетенции	Оценочные средства		
			Кол-во заданий для экзамена	Другие оценочные средства	
				Вид	Кол-во
1	Тема 1. Коэрцитивные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами. Основные определения и обозначения.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	2 3 2
2	Тема 2. Коэрцитивные оценки и разрешимость дифференциального оператора частного порядка с сингулярными коэффициентами.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	3 3 3
3	Тема 3. Коэрцитивные оценки и разделимость оператора нечетного порядка с сингулярными коэффициентами.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	3 3 3
4	Тема 4. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с матричным потенциалом.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	2 3 2
5	Тема 5. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с матричными коэффициентами.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	3 3 3
6	Тема 6. Разделимость оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом. Формулировка основной теоремы разделимости.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
7	Тема 7. Вспомогательные леммы.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
8	Тема 8. Доказательство теоремы разделимости. Разделимость нелинейного оператора Штурма-Лиувилля.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1

9	Тема 9. Условия разделимости нелинейного оператора Штурма-Лиувилля.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
10	Тема 10. Вспомогательные утверждения и неравенства.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
11	Тема 11. Доказательство теоремы разделимости. Элементы техники теории возмущений.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
12	Тема 12. Коэрцитивная разрешимость и разделимость и эллиптических систем второго порядка в банаховых пространствах Основные определения и обозначения. Вспомогательные леммы и неравенства.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
13	Тема 13. Разделимость оператора Шредингера в банаховых пространствах вектор-функций.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	5	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
14	Тема 14. Оценка резольвенты. Доказательство теоремы разделимости.	ОПК-1 ОПК-3 ПК-2 ПК-3	6	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
15	Тема 15. Формулировка основной теоремы.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	7	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
16	Тема 16. Лемма о разбиении единицы. Вспомогательные неравенства.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	8	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 3 1
17	Тема 17. Некоторые следствия из теоремы разделимости. 3.7. Конструкция регуляризатора. Доказательство теоремы разделимости.	ПК-4 ПК-5 ПК-6	8	Выступление Коллоквиум Дискуссия	1 2 1
Всего:			94		100

ТЕМЫ ВЫСТУПЛЕНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Формируемые компетенции

ПК-4 – Способен формировать способность к логическому рассуждению, убеждению, математическому доказательству и подтверждению его правильности

ПК-5 – Способен организовать исследования в области математики

ПК-6 – Способен выявлять у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью

Выступление – речь, лекция, доклад, заявление и т.п., которые сообщаются кем-либо в устной форме.

Выступление студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов:
- творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

1. Линейные вполне непрерывные операторы
2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов
3. Спектр линейных операторов
4. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения
5. Понятие разделимости дифференциальных операторов
6. Фундаментальное решение и методы его нахождения
7. Определение оператора класса Трибеля
8. Способы оценки фундаментального решения
9. О резольвенте оператора класса Трибеля
10. Оценки резольвенты оператора класса Трибеля
11. Коэрцитивные оценки для оператора класса Трибеля
12. Примеры весовых функций, используемых в коэффициентах оператора класса Трибеля и характеры их поведения в различных областях
13. Интегральное представление и методики его нахождения
14. Линейные пространства
15. Нормированные пространства
16. Банаховы пространства
17. Гильбертовы пространства
18. Пространства Лебега

Требование к выступлению:

- точность ответа на поставленный вопрос;
- формулировка целей и задач работы;

– раскрытие (определение) рассматриваемого понятия (определения, проблемы, термина);
– четкость структуры работы;
– самостоятельность, логичность изложения;
– наличие выводов, сделанных самостоятельно.

Критерии оценки по выступлению:

Отметка «5». Выступление выполнено в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности. Работа соответствует требованию.

Отметка «4». Выступление отвечает предъявленным требованиям. Допускаются отклонения от необходимой последовательности выполнения, не влияющие на правильность конечного результата.

Отметка «3». Учащиеся показывают знания не в полной мере и испытывают затруднение при решении задач.

Отметка «2» выставляется в том случае, когда учащиеся не подготовлены к выполнению этой работы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

Формируемые компетенции

ПК-4 – Способен формировать способность к логическому рассуждению, убеждению, математическому доказательству и подтверждению его правильности

ПК-5 – Способен организовать исследования в области математики

ПК-6 – Способен выявлять у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью

Коллоквиум – форма учебного занятия, понимаемая как беседа преподавателя с учащимися с целью активизации знаний.

Коллоквиум представляет собой мини-экзамен, проводимый с целью проверки и оценки знаний студентов после изучения большой темы или раздела в форме опроса или опроса с билетами.

Коллоквиум может проводиться в устной или письменной форме.

1.1. Доказать лемму 2.1. о неравенствах весовых функций $\rho(\tau)\le 2\rho(t),\ \rho(t)\le 2\rho(\tau).$

2.Доказать лемму 2.2. о неравенствах $\delta(t)\le 2\delta(\tau)\le 4\delta(t),$ где $\delta(t)=q^{-\omega}(t),\ \omega=\dfrac{1}{2m},\ q(t)=\rho^{v}(t)b_0(t).$

3.Доказать лемму 2.2. о неравенствах $q(t)\le 2q(\tau)\le 4q(t),$ где $q(t)=\rho^{v}(t)\,b_0(t).$

4.Доказать лемму 2.2. о неравенстве $\left|q(t)-q(\tau)\right|\le 2x\theta^{-1}q(\tau).$

5.Доказать лемму 2.3. о неравенствах весовых функций $l(t)\le 2l(\tau),\ l(\tau)\le 2l(t).$

6.Доказать лемму 2.4. о неравенстве $\left|\rho^{x_{2l}}(t)b_l(t)-\rho^{x_{2l}}(\tau)\right|\le x\theta^{-1}2^{x_{2l}+\omega}\rho^{x_{2l}}(\tau)$

7.Доказать лемму 2.5. о неравенствах $mes\,\Omega_t(\tau,\ \theta)\le 2\theta^{-1}q^{-\omega}(\tau),$ $mes\,\Omega_\tau(\tau,\ \theta)\le 2^{\omega+1}\theta^{-1}q^{-\omega}(t).$

8.Доказать оценку $\left|\dfrac{d^j}{d\,t^j}R_0(t,\ \tau)\right|\le\dfrac{1}{2\pi}(q(\tau)+\lambda)^{(j+1)\omega-1}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,z\,|^j}{z^{2m}+1}dz$.

9.Найти интеграл и его оценку $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,z\,|^j}{z^{2m}+1}dz$.

10.Доказать оценку $\left|\dfrac{d^{2m-1}}{d\,t^{2m-1}}R_0(t,\ \tau)\right|\le\dfrac{1}{2}$.

11.Доказать неравенство $\frac{1}{2}q^{\omega(\gamma+1)-1}(\tau)\le q^{\omega(\gamma+1)-1}(t)$.

12.Доказать, что для $\forall$ функции $\omega(t)\in B^1_{loc}(\Omega)$ функция $\varpi(t)=\int\limits_\Omega F_\lambda(t,\tau)\omega(\tau)d(\tau)\in B^1_{loc}(\Omega)$.

13.Доказать неравенство $\left|\left[\rho^c(t)\right]^k\right|\le M_{c,k}\rho^{c+k}(t).$

14.Доказать лемму 3.2 о соотношении $D^\alpha_t(\rho^{x_{2l}}(t))=0(1)q(t).$

15.Для оператора $A\in\mathfrak{A}^m_{\mu.\nu}(\Omega;\rho(t))$ получить оператор A^* ,формально сопряжённый к А.

16.Получить фундаментальное решение для уравнения
$(A+\lambda E)y=f,\ A\in\mathfrak{A}^m_{\mu.\nu}(\Omega;\rho(t)),\ \lambda>0,\ t\in R_1.$

17.Получить формулу «основного тождества».

18.Получить соотношение $A+\lambda E)\omega=\nu+G_\lambda\nu$, $A\in\mathfrak{A}^m_{\mu.\nu}(\Omega;\rho(t))$, G_λ - некоторый интегральный оператор.

19.Доказать лемму 4.1 об оценке интегрального оператора
$\|T\|_{p,l}\le K_1+K_2, T\in\tilde{L}_{pl}$

20.Доказать неравенства
$\left|\rho^{x_{2l}}(t)b_l(t)\right|\le xq^{1-2l\omega}(t)$, $\left|\rho^{x_j}(t)\right|\le xq^{1-j\omega}(t).$

21.Доказать лемму 5.1 о том, что если
$u\in\tilde{L}_{p,l}(\Omega)$ $u\forall\omega\in B^{2m}_0(\Omega)\ u,(A+\lambda E)^*\omega)=0,(u,A^*\omega)=0$.
Тогда $u=0$

22.Доказать лемму 5.2 о замыкании A_p оператора $A\in\mathfrak{A}^m_{\mu.\nu}(\Omega;\rho(t))$.

23.Доказать, что оператор $A_p+\lambda E$ имеет непрерывный обратный в $L_{p,l}(\Omega)$.

24.Построить регуляризатор вида $(A+\lambda E)F_\lambda\upsilon=\upsilon+G_x\upsilon$.

25.Доказать неравенства $\left|\rho^{x_{2l}}(t)b_l(t)\right|\le xq^{1-2l\omega}(t)$ и $\left|\rho^{x_j}(t)\right|\le xq^{1-j\omega}(t).$

26.Найти норму интегрального оператора

$$G_{1\lambda}=\sum_{l=1}^{m-1} G_{(l)}$$

27.Найти норму интегрального оператора

$$G_{2\lambda}=\sum_{j=1}^{2m1} \widehat{G}_{(j)}$$

28.Найти норму интегрального оператора

$$G_{3\lambda}=\sum_{l=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{2l} G_{(l)}^{(j)} .$$

29.Найти норму интегрального оператора

$$G_{4\lambda}=\sum_{l=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{2l} \widetilde{G}_{(l)}^{(j)} .$$

30.Найти норму интегрального оператора

$$G_{5\lambda}=\sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{k} G_{(k)}^{(j)}$$

31.Найти норму оператора $(\mathrm{A}_p+\lambda \mathrm{E})^{-1}$

в пространстве $L_{p,l}(\Omega)$.

32.Доказать оценку

$$\left\|\mathrm{R}(_{\lambda'-\lambda)}(\mathrm{A}_p)\right\|_{p,l} \leq \mathrm{M} \text{ ,где } M=\mathrm{M}(\lambda,\lambda')=\text{const.}$$

33.Доказать оценку

$$\left\|\mathrm{R}(_{\lambda'-\lambda)}(\mathrm{A}*_p)\right\|_{p,l} \leq \mathrm{N} \text{ ,где } \mathrm{N}=\mathrm{N}(\lambda,\lambda')= \text{const.}$$

34.Доказать теорему о разделимости оператора $A \in \mathfrak{A}_{\mu.\nu}^{m}((0;1);\rho(t))$ в пространстве $L_{p,l}((0,1))$

35.Доказать неравенство коэрцитивности для оператора $A \in \mathfrak{A}_{\mu.\nu}^{m}((0;1);\rho(t))$ в пространстве $L_{p,l}(\Omega)$.

36.Получить неравенство коэрцитивности в случае $L_\infty(\Omega)$.

37.Доказать оценки

$$\left\|\rho^{x_{2l}}(t) b_l(t) \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} y(t)\right\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p,1}}(\Omega)} \leq C_1, \qquad \left\|a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} y(t)\right\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p,1}}(\Omega)} \leq C_2,$$

где C_1, C_2 - const.

38.Доказать неравенство $\left|l_p(t)\right| \leq x(q(t)+\lambda)^{\omega} l_p(t)$ где $l_p,(\mathrm{t})=(1+t^2)^{-\frac{1}{p}} l(t).$

39.Найти оценки $\left|\rho^{x_j}(t) \dfrac{d^j}{dt^j} F_\lambda(t,\tau)\right|$ ядра оператора $\rho^{x_j}(t) \dfrac{d^j}{dt^j} F_\lambda.$

40.Доказать,что

$$\lim_{p\to\infty}\left\|(1+t^2)^{-\frac{1}{p}}y\right\|_{L_{p,l}}(\Omega)\to\|y\|_{L_{p,l}}(\Omega).$$

41.Доказать тождество

$$(A+\lambda E)^{-1}=F_\lambda(\mathrm{E}+Q_\lambda).$$

42.Доказать,что в тождестве $(A+\lambda E)^{-1}=F_\lambda(\mathrm{E}+Q_\lambda)$ норма оператора Q_λ не превосходит $\frac{1}{2}$.

43.Доказать, что $\left\|(\mathrm{E}+G_\lambda)^{-1}\right\|_{L_p(R_+)}\le\frac{3}{2}$.

44.Докзать,что оператор $Q_\lambda=-G_\lambda\ (\mathrm{E}+G_\lambda)^{-1}$.

45.Доказать,что $\left\|Q_\lambda\right\|_{L_p(R_+)}\le\frac{1}{2}$.

46.Доказать неравенство

$$C_1\|y\|_{L_p(\Omega)}\left|F_\lambda y,W_p^{2m}(\Omega;\rho^{p\mu},\rho^{p\nu})\right|\le C_2\|y\|_{L_p(\Omega)}.$$

47.Получить интегральное представление

$$y(t)=\int_0^{+\infty}F_\lambda(t\tau)U(\tau)d\tau,\quad U\in L_p(R_+).$$

48.Пусть $\mathrm{A}=4(t^{-1}\frac{d^4}{dt^4}+t^2)$.

Найти норму $y,W_p^4(R_+;\rho^{p\mu},\rho^{p\nu})$.

49.Пусть оператор $\mathrm{A}=4(t^{-1}\frac{d^4}{dt^4}+t^2)$

Найти норму $y,W_\infty^4(R_+;\rho^{p\mu},\rho^{p\nu})$.

50.Построить функции для весовой функции $\rho(t)$ и коэффициентов $b_l(t),l=0,\overline{m},a_k*(t),k=\overline{0,2m-1}$ на произвольной области.

Критерии оценки коллоквиума:

Оценка «5» - глубокое и прочное усвоение материала. Умение доказать свое решение. Демонстрация обучающимся знаний в объеме пройденной программы. Воспроизведение учебного материала с требуемой степенью точности.

Оценка «4» - наличие несущественных ошибок, уверенно исправляемых обучающимся после дополнительных и наводящих вопросов. Демонстрация обучающимся знаний в объеме пройденной программы. Четкое изложение учебного материала.

Оценка «3» - наличие несущественных ошибок в ответе, не исправляемых обучающимся. Демонстрация обучающимся недостаточно полных знаний по пройденной программе.

Оценка «2» - не знание материала пройденной темы. При ответе возникают серьезные ошибки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДИСКУССИИ

Формируемые компетенции

ПК-4 – Способен формировать способность к логическому рассуждению, убеждению, математическому доказательству и подтверждению его правильности

ПК-5 – Способен организовать исследования в области математики

ПК-6 – Способен выявлять у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью

Дискуссия — обсуждение спорного вопроса, проблемы; разновидность спора, направленного на достижение истины и использующего только корректные приёмы ведения спора.

1. Линейные пространства
2. Нормированные пространства
3. Банаховы пространства
4. Гильбертовы пространства
5. Пространства Лебега
6. Интеграл Лебега
7. Пространства Соболева
8. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность
9. Пространства линейных операторов
10. Обратные операторы
11. Сопряженные пространства
12. Сопряженные и самосопряженные операторы
13. Линейные вполне непрерывные операторы
14. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов
15. Спектр линейных операторов
16. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения
17. Понятие разделимости дифференциальных операторов
18. Фундаментальное решение и методы его нахождения

Критерии оценки дискуссии:

1. Оценка «отлично» выставляется студенту, если он активно принимал участие в дискуссии и отвечал на вопросы полным ответом с доказательством и решением безошибочно.
2. Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он активно учувствовал в дискуссии, но у него были несущественные ошибки, которые он потом исправлял.
3. Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он не учувствовал в дискуссии добровольно, а при вызывании к доске отвечал не в полной мере.

4. Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не учувствовал в дискуссии, а при вызывании к доске не мог ничего ответить.

ЗАДАНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ТЕОРИЯ РАЗДЕЛИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ (ЭКЗАМЕН)

ПК-4 – Способен формировать способность к логическому рассуждению, убеждению, математическому доказательству и подтверждению его правильности

ПК-5 – Способен организовать исследования в области математики

ПК-6 – Способен выявлять у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №1

1. Доказать лемму 2.1. о неравенствах весовых функций $\rho(\tau) \le 2\rho(t),\ \rho(t) \le 2\rho(\tau)$.
2. Построить функции для весовой функции $\rho(t)$ и коэффициентов $b_l(t), l = 0,\overline{m}, a_k{}^*(t), k = \overline{0,2m-1}$ на произвольной области.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №2

1. Пусть оператор $\mathrm{A} = 4(t^{-1}\frac{d^4}{dt^4} + t^2)$ Найти норму $y, W^4_\infty(R_+; \rho^{p\mu}, \rho^{p\nu})$.
2. Доказать лемму 2.2. о неравенствах $\delta(t) \le 2\delta(\tau) \le 4\delta(t),$ где $\delta(t) = q^{-\omega}(t),\ \omega = \frac{1}{2m},\ q(t) = \rho^{\nu}(t) b_0(t).$
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №3

1. Доказать лемму 2.2. о неравенствах $q(t) \le 2q(\tau) \le 4q(t),$ где $q(t) = \rho^{\nu}(t)\, b_0(t).$

---

2. Пусть $A = 4(t^{-1}\frac{d^4}{dt^4} + t^2)$.Найти норму $y, W_p^4(R_+; \rho^{p\mu}, \rho^{p\nu})$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №4

1. Получить интегральное представление $y(t) = \int\limits_0^{+\infty} F_\lambda(t\tau)U(\tau)d\tau, \quad U \in L_p(R_+)$.
2. Доказать лемму 2.2. о неравенстве $|q(t) - q(\tau)| \le 2x\theta^{-1}q(\tau)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №5

1. Доказать лемму 2.3. о неравенствах весовых функций $l(t) \le 2l(\tau),\ l(\tau) \le 2l(t)$.
2. Получить интегральное представление $y(t) = \int\limits_0^{+\infty} F_\lambda(t\tau)U(\tau)d\tau, \quad U \in L_p(R_+)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №6

1. Доказать неравенство $C_1\|y\|_{L_p(\Omega)} \left| F_\lambda y, W_p^{2m}(\Omega; \rho^{p\mu}, \rho^{p\nu}) \right| \le C_2\|y\|_{L_p(\Omega)}$.
2. Доказать лемму 2.4. о неравенстве $\left| \rho^{x_{2l}}(t)b_l(t) - \rho^{x_{2l}}(\tau) \right| \le x\theta^{-1}2^{x_{2l}+\omega}\rho^{x_{2l}}(\tau)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №7

1. Доказать лемму 2.5. о неравенствах $mes\,\Omega_t(\tau,\ \theta)\le 2\theta^{-1}q^{-\omega}(\tau),$ $mes\,\Omega_\tau(\tau,\ \theta)\le 2^{\omega+1}\theta^{-1}q^{-\omega}(t).$
2. Доказать,что оператор $Q_\lambda = -G_\lambda\,(\mathrm{E}+G_\lambda)^{-1}$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №8

1. Доказать оценку $\left|\dfrac{d^j}{d\,t^j}R_0(t,\ \tau)\right|\le\dfrac{1}{2\pi}\left(q(\tau)+\lambda\right)^{(j+1)\omega-1}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{|\,z\,|^j}{z^{2m}+1}dz$.
2. Регуляризатор для оператора класса Трибеля
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №9

1. Найти интеграл и его оценку $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{|\,z\,|^j}{z^{2m}+1}dz$
2. Доказать, что в тождестве $(A+\lambda E)^{-1}=F_\lambda(\mathrm{E}+Q_\lambda)$ норма оператора Q_λ не превосходит $\dfrac{1}{2}$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №10

1. Доказать тождество $(A+\lambda E)^{-1}=F_\lambda(\mathrm{E}+Q_\lambda)$.
2. Доказать оценку $\left|\dfrac{d^{2m-1}}{d\,t^{2m-1}}R_0(t,\ \tau)\right|\le\dfrac{1}{2}$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»

Билет №11

1. Доказать неравенство $\frac{1}{2}q^{\omega(\gamma+1)-1}(\tau) \le q^{\omega(\gamma+1)-1}(t)$.
2. Доказать,что $\lim\limits_{p\to\infty}\left\|(1+t^2)^{-\frac{1}{p}}y\right\|_{L_{p,l}}(\Omega) \to \|y\|_{L_{p,l}}(\Omega)$
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»

Билет №12

1. Найти оценки $\left|\rho^{x_j}(t)\frac{d^j}{dt^j}F_\lambda(t,\tau)\right|$ ядра оператора $\rho^{x_j}(t)\frac{d^j}{dt^j}F_\lambda$.
2. Доказать, что для $\forall$ функции $\omega(t) \in B^1_{loc}(\Omega)$ функция $\varpi(t) = \int\limits_\Omega F_\lambda(t,\tau)\omega(\tau)d(\tau) \in B^1_{loc}(\Omega)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»

Билет №13

1. Доказать неравенство $\left|\left[\rho^c(t)\right]^k\right| \le M_{c,k}\rho^{c+k}(t)$.
2. Доказать неравенство $\left|l_p(t)\right| \le x(q(t)+\lambda)^{\omega} l_p(t)$ где l_p,(t)$=(1+t^2)^{-\frac{1}{p}}l(t)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №14

1. Доказать оценки
   $\left\| \rho^{x_{2l}}(t) b_l(t) \dfrac{d^{2l}}{dt^{2l}} y(t) \right\|_{\mathrm{L}_{p,1}(\Omega)} \le C_1$, $\left\| a_k(t) \dfrac{d^k}{dt^k} y(t) \right\|_{\mathrm{L}_{p,1}(\Omega)} \le C_2$, где C_1, C_2 - const.
2. Доказать лемму 3.2 о соотношении $D_t^{\alpha}(\rho^{x_{2l}}(t)) = 0(1)q(t).$
3. Пример.

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №15

1. Для оператора $A \in \mathfrak{M}^m_{\mu.\nu}(\Omega; \rho(t))$ получить оператор A^*,формально сопряжённый к А.
2. Получить неравенство коэрцитивности в случае $L_\infty(\Omega)$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №16

1. Доказать неравенство коэрцитивности для оператора
   $A \in \mathfrak{M}^m_{\mu.\nu}((0;1); \rho(t))$ в пространстве $L_{p,l}(\Omega)$.
2. Получить фундаментальное решение для уравнения
   $(A + \lambda E)y = f$, $A \in \mathfrak{M}^m_{\mu.\nu}(\Omega; \rho(t))$, $\lambda > 0$, $t \in R_1$.
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №17

1. Получить формулу «основного тождества»

2. Доказать теорему о разделимости оператора $A \in \mathfrak{A}^{m}_{\mu.\nu}((0;1);\rho(t))$ в пространстве $L_{p,l}((0,1))$
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №18

1. Доказать оценку $\left\| R(_{\lambda' - \lambda})(A*_{p}) \right\|_{p,l} \leq N$,где $N = N(\lambda, \lambda') =$ const.
2. Доказать лемму 4.1 об оценке интегрального оператора $\|T\|_{p,l} \leq K_1 + K_2, T \in \widetilde{L}_{pl}$
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №19

1. Доказать неравенства$\left| \rho^{x_{2l}}(t) b_l(t) \right| \leq xq^{1-2l\omega}(t)$, $\left| \rho^{x_j}(t) \right| \leq xq^{1-j\omega}(t)$.
2. Найти норму оператора $(A_p + \lambda E)^{-1}$в пространстве$L_{p,l}(\Omega)$
3. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №20

29. Доказать неравенства$\left| \rho^{x_{2l}}(t) b_l(t) \right| \leq xq^{1-2l\omega}(t)$, $\left| \rho^{x_j}(t) \right| \leq xq^{1-j\omega}(t)$.
30. Найти норму интегрального оператора $G_{5\lambda} = \sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{k} G_{(k)}^{(j)}$
31. Пример

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №21

1. Найти норму интегрального оператора $G_{4\lambda}=\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{2l}\widetilde{G}_{(l)}^{(j)}$
2. Доказать лемму 5.1 о том, что если $u\in\widetilde{L}_{p,l}(\Omega)$ $u\forall\omega\in B_0^{2m}(\Omega)$

   $u,(A+\lambda E)^{*}\omega)=0,(u,A^{*}\omega)=0$. Тогда $u=0$
3. Пример
4.

РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математики и физики
Экзаменационный билет по дисциплине
«Теория разделимости дифференциальных операторов»
для студентов 4-го курса направления бакалавра 01.03.01 «Математика»
Билет №22

1. Доказать лемму 5.2 о замыкании A_p оператора $A\in \mathfrak{N}^{m}_{\mu.\nu}(\Omega;\rho(t))$.
2. Построить регуляризатор вида $(A+\lambda E)F_\lambda\upsilon=\upsilon+G_x\upsilon$.
3. Пример

1.Найти общие решение уравнение и частное решение удовлетворяюшее начальному условию $y=4$ при $x=-2$ $x\bullet y'-y=0$.
2.Найти общее решение уравнение и частное решение удовлетворяющее начальному условию $y=4$ при $x=-2$ $xy'+y=0$.
3.Найти общие решение уравнение и частное решение удовлетворяющее начальному условию $y=4$ при $x=-2$ $y\bullet y'+x=0$.
4.Найти общие решение уравнение и частное решение удовлетворяющее начальному условию $y=4$ при $x=-2$ $y'=y$.
5.Найти общие интеграл уравнения $x^2y'+y=0$.
6.Найти общие интеграл уравнения $x+xy+y'(y+xy)=0.;$
7.Найти общие интеграл уравнения $\varphi^2\cdot dr+(r+a)d\varphi=0$.
8.Найти общие интеграл уравнения $2S\cdot t^2ds=(1+t^2)dt$.
9. Найти общий и частное интеграл по начальным условия y=1 при x=4,2y′√x=y
10. Найти общий и частное интеграл по начальным условия $y=\frac{1}{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}$ $y'=(2y+1)ctgx$.
11.Найти общий и частное интеграл по начальным условия $\text{y}=1$ при $x=-1$ $x^2y'+y^2=0$.
12.Решит уравнение $y'x^3=2y$.
13.Решит уравнение $(x^2+x)\cdot y^3=2y+1$.
14.Решит уравнение $y'\cdot\sqrt{a^2}+x^2y$.
15.Решит уравнение $(1+x^2)y'+1+y^2=0$.
16.Решит уравнение при $r=2$и при $\varphi=\pi$ $dr+r\cdot tg\varphi\cdot d\varphi$.
17.Решит уравнение $y'=2\sqrt{ylnx}$.
18. Решит уравнение $(1+x^2)\cdot y'+y\sqrt{1}+x^2=xy$.
19.Решит дифференциальное уравнение: $yy'=2y-x$.
20.Решит дифференциальное уравнение: $x^2+y^2-2xyy'=0$.

21.Решит дифференциальное уравнение: $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$;

22. Решит дифференциальное уравнение: $y' - \frac{3y}{x} = x$.

23.Решит дифференциальное уравнение: $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

24. Решит дифференциальное уравнение: $y'cosx - ysinx = sinx$.

25. Решит дифференциальное уравнение: $y'x + y = -xy^2$.

26.Решит дифференциальное уравнение: $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

27. Решит дифференциальное уравнение: $xy' * cos\frac{y}{x} = y * cos\frac{y}{x} - x$.

28. Решит дифференциальное уравнение: $xy' = y^2 + xy$.

29. Решит дифференциальное уравнение: $xy' + y = lnx + 1$.

30. Решит дифференциальное уравнение: $x^2y^2y' = yx^3 = 1$.

31.Найти частные интегралы по данным начальным условиям:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0; \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{x} = 1.$$

32.Найти частные интегралы по данным начальным условиям:

$$t2\, ds/dt = 2ts - 3; \qquad s = 1 \quad \text{при} \quad t = -1.$$

33. Найти частные интегралы по данным начальным условиям:

$$xy' = y(1 + lny/x); \qquad y = 1/\sqrt{e} \quad \text{при} \quad \mathrm{x} = 1.$$

34. Решить дифференциальные уравнения: $xy + y2 = (2x2 + xy)y'$.

35. Решить дифференциальные уравнения: $(a2 + x2)y' + xy = 1$.

36. Решить дифференциальные уравнения: $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

37. Решить дифференциальные уравнения: $(2x + 1)y' + y = x$.

38. Решить дифференциальные уравнения: $y' - y\, tgx = ctgx$.

39. Решить дифференциальные уравнения: $tds - 2sdt = t3\, ln\, t\, dt$.

40. Решить дифференциальные уравнения: $y' + xy = xy3$.

Критерии оценки заданий

«отлично» - более 90 баллов;
«хорошо» - более 75 баллов;
«удовлетворительно» - менее 70 баллов;
«неудовлетворительно» - менее 50 баллов.

Разработчик: к.ф.-м.н., доцент Гулбоев Б.Дж. ________________
« » ___________ 2024г.