

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
ТАДЖИКИСТАН  
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»  
«28» августа 2023 г.  
Заведующий кафедрой  
математики и физики



Гаибов Д.С.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по учебной дисциплине

**«Классическая дифференциальная геометрия»**  
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»  
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»  
Форма подготовки - очная  
Уровень подготовки - магистратура

**ПАСПОРТ  
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства  Вид
1.	Плоские кривые	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	10	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Пространственные кривые	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	10	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Общая локальная теория кривых	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
4.	Основная теорема локальной теории кривых	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы	10	Перечень вопросов для устного опроса

			и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии		
5.	Дополнительные теоремы теории плоских кривых	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы.	10	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Понятие поверхности	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
7.	Многообразия	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	10	Перечень вопросов для устного опроса
8.	Элементы тензорной алгебры	ПК-2	ИПК-2.2. Умеет создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и	10	Перечень вопросов для устного опроса

			научно-производственные работы.		
9.	Тензорные поля на многообразиях	ПК-2	ИПК-2.3. Владеет в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.	10	Перечень вопросов для устного опроса
10.	Риманова геометрия	ПК-2	ИПК-2.1. Знает существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии	11	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				61	

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА**  
по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1. Плоские кривые.
2. Способы задания пространственных кривых
3. Кривые в n-мерном евклидовом пространстве
4. Основная теорема локальной теории кривых
5. Теорема Хопфа
6. Понятие поверхности
7. Способы задания поверхности
8. Понятие многообразия
9. Карты и атлас
10. Векторное и сопряженное пространства
11. Канонический изоморфизм
12. Дуальные базисы
13. Различные определения касательного вектора

14. Касательное пространство к многообразию в точке

15. Погружение, вложение, подмногообразие

16. Метрика

17. Риманово (псевдориманово) многообразие

18. Индуцированная метрика

### Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «не зачтено»

Решение неверное или отсутствует

## ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

1.

**Задача:** Какое условие необходимо для того, чтобы две плоские кривые  $C_1$  и  $C_2$  касались друг друга в точке  $P$ ?

- А) Они должны пересекаться в точке  $P$ .
- В) У них должны совпадать производные в точке  $P$ .
- С) Они должны иметь одинаковую длину.
- D) Они должны быть параллельны.

2.

**Задача:** Найдите точку касания кривых  $y = x^2$  и  $y = 2x - 1$ .

- А)  $(0, 0)$
- В)  $(1, 1)$
- С)  $(1, 1)$  и  $(0, 0)$
- D) Кривые не касаются.

3.

**Задача:** Для каких значений параметра  $a$  кривые  $y = ax^2$  и  $y = x + a$  касаются друг друга?

- А)  $a = 0$
- В)  $a = 1$
- С)  $a = -1$
- D)  $a = \frac{1}{2}$

4.

**Задача:** Найдите кривизну плоской кривой, заданной параметрически:

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.

**Задача:** Для какой из следующих кривых кривизна постоянна?

a)  $y = x^2$

b)  $y = \sin(x)$

c)  $y = x$

d)  $y = c$  (где  $c$  — константа)

6.

**Задача:** Какое из следующих утверждений о кривизне пространственной кривой верно?

- A) Кривизна всегда положительна.
- B) Кривизна может быть отрицательной.
- C) Кривизна равна нулю только для прямых.
- D) Все вышеуказанные утверждения верны.

7.

**Задача:** Как называется мера изменения направления касательной к кривой в пространстве?

- A) Кривизна
- B) Кручение
- C) Длина дуги
- D) Угловая скорость

8.

**Задача:** Если кривая задана параметрически уравнениями  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , то формула для кривизны  $\kappa$  кривой равна:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Верно ли это утверждение?

- A) Верно
- B) Неверно

9.

**Задача:** Пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, где  $I$  — некоторый интервал. Какой из следующих условий достаточен для того, чтобы  $\gamma$  была параметризована по длине?

- А)  $\|\gamma'(t)\| = 1$  для всех  $t \in I$ .
- В)  $\gamma$  является дифференцируемой функцией.
- С)  $\gamma$  замкнута.

10.

**Задача:** Какое из следующих утверждений верно относительно кривой  $\gamma(t)$ , если  $\gamma'(t) = 0$  для некоторого  $t_0 \in I$ ?

- А) Кривая в точке  $t_0$  имеет точку перегиба.
- В) Кривая в точке  $t_0$  имеет локальный экстремум.
- С) Кривая  $\gamma$  не может быть гладкой.

11.

**Задача:** Пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывная кривая. Если  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ , то:

- А) Кривая замкнута.
- В) Кривая пересекает сама себя.
- С) Кривая является гладкой.

12.

**Задача:** Пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, где  $I$  — интервал. Если  $\gamma'(t) \neq 0$  для всех  $t \in I$ , то кривая  $\gamma$  является:

- А) Линейной
- В) Параметрической
- С) Регулярной
- D) Замкнутой

13.

**Задача:** Если кривая  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет непрерывные производные до второго порядка и  $\gamma''(t) = 0$  для некоторого  $t \in I$ , то кривая:

- А) Прямая
- В) Кривая с постоянной кривизной
- С) Кривая с постоянной скоростью
- D) Кривая с постоянным направлением

14.

**Задача:** Основная теорема локальной теории кривых утверждает, что в окрестности точки  $t_0$  кривая  $\gamma(t)$  может быть описана как:

- A) Линейная функция
- B) Полиномиальная функция
- C) Локальная параметризация
- D) Параметрическая кривая

15.

**Задача:** Какое из следующих утверждений о плоских кривых является верным?

- A) Все плоские кривые являются гладкими.
- B) Плоская кривая может иметь точки разрыва.
- C) Плоская кривая всегда замкнута.
- D) Все плоские кривые имеют одинаковую длину.

16.

**Задача:** Какое из следующих свойств не относится к кривизне плоской кривой?

- A) Кривизна может быть положительной или отрицательной.
- B) Кривизна всегда равна нулю для прямой линии.
- C) Кривизна плоской кривой всегда постоянна.
- D) Кривизна характеризует степень изменения направления касательной.

17.

**Задача:** Как называется теорема, утверждающая, что если плоская кривая имеет постоянную кривизну, то она является окружностью?

- A) Теорема о постоянной кривизне.
- B) Теорема Френе.
- C) Теорема о кривизне и радиусе.
- D) Теорема Бенедикта.

18.

**Задача:** Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = x^2 + y^2$  в точке  $(1, 1, 2)$ .

- A)  $z = 2x + 2y - 2$
- B)  $z = 2x + 2y - 1$
- C)  $z = 2x + 2y + 1$
- D)  $z = 2x + 2y + 2$

19.

**Задача:** Какова формула для нахождения уравнения касательной плоскости к поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ ?

- A)  $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
- B)  $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(y - y_0) + f_y(x_0, y_0)(x - x_0)$
- C)  $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y + y_0)$
- D)  $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x + x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

20.

**Задача:** Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = \sin(x) + \cos(y)$  в точке  $(0, 0, 1)$ .

- A)  $z = x + y + 1$
- B)  $z = x + y$
- C)  $z = -x + y + 1$
- D)  $z = -x - y + 1$

21.

**Задача:** Какой из следующих объектов является 2-мерным многообразием?

- A) Прямая линия
- B) Круг
- C) Плоскость
- D) Точка

22.

**Задача:** Является ли множество  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  многообразием?

- A) Да
- B) Нет

23.

**Задача:** Какой из следующих объектов является гладким многообразием?

- A) Окружность в  $\mathbb{R}^2$
- B) Множество всех точек, где функция  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  равна нулю
- C) Оба
- D) Ни один

24.

**Задача:** Какое из следующих утверждений о касательном пространстве в точке  $p$  многообразия  $M$  верно?

- A) Касательное пространство всегда является векторным пространством.
- B) Касательное пространство является подмножеством  $M$ .
- C) Касательное пространство содержит только одну точку  $p$ .
- D) Касательное пространство всегда имеет размерность 1.

25.

Какой из следующих объектов является тензором второго ранга?

- A) Вектор
- B) Скаляр
- C) Матрица
- D) Функция

26.

Какое из следующих свойств не является свойством тензоров?

- A) Линейность
- B) Асимметричность
- C) Непрерывность
- D) Мультипликативность

27.

Какой из следующих законов преобразования тензоров верен для тензора второго ранга при изменении базиса?

- A)  $T'_{ij} = T_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}$
- B)  $T'_{ij} = T_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j}$
- C)  $T'_{ij} = T_{ij}$
- D)  $T'_{ij} = T_{ij} + C$

28.

Какой из следующих объектов представляет собой тензорное поле на многообразии?

- A) Скалярная функция
- B) Векторное поле
- C) Тензорное поле
- D) Все вышеперечисленное

29.

Какой тип тензорного поля описывает кривизну многообразия?

- A) Нормальное поле
- B) Векторное поле
- C) Тензор кривизны
- D) Скалярное поле

30.

Какое из следующих утверждений о тензорных полях на многообразиях верно?

- A) Тензорные поля могут иметь разные ранги в разных точках многообразия.
- B) Тензорные поля всегда являются скалярными функциями.
- C) Тензорные поля не могут быть интегрированы.
- D) Тензорные поля всегда являются постоянными.

31.

Какой из следующих объектов является ключевым понятием в римановой геометрии?

- A) Плоская поверхность
- B) Риманова метрика
- C) Линейное пространство
- D) Скалярное произведение

32.

Какой из следующих свойств не относится к римановой метрике?

- A) Симметричность
- B) Положительная определенность
- C) Линейность
- D) Непрерывность

33.

Какой из следующих результатов связан с римановой геометрией?

- A) Теорема Пифагора
- B) Формула Гаусса
- C) Теорема о кривизне
- D) Все вышеперечисленное

### **Критерии оценки:**

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «не зачтено»

Решение неверное или отсутствует

## **ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И ЗАДАЧИ НА СООТВЕТСТВИЕ**

по дисциплине «Классическая дифференциальная геометрия»

### **Задачи открытого типа:**

1.

**Задача:** Обоснуйте, как можно проверить, касаются ли две плоские кривые в заданной точке. Какие математические инструменты вы будете использовать?

2.

**Задача:** Обоснуйте, как соотношение между первой и второй производными параметрической функции влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры.

3.

**Задача:** Объясните, как кручение и кривизна связаны между собой для пространственной кривой. Приведите примеры кривых с заданными значениями кривизны и кручения.

4.

**Задача:** Опишите, что такое параметризация кривой по длине. Как она отличается от обычной параметризации?

5.

**Задача:** Объясните, что такое регулярная кривая и как это определение связано с производной кривой. Приведите примеры регулярных и нерегулярных кривых.

6.

**Задача:** Обоснуйте, как изменение параметра влияет на кривизну плоской кривой. Приведите примеры, иллюстрирующие ваше объяснение.

7.

**Задача:** Обоснуйте, как можно определить касательную плоскость к поверхности, заданной неявно уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Каковы необходимые условия для нахождения касательной плоскости?

8.

**Задача:** Опишите, что такое дифференцируемое многообразие. Каковы основные свойства и примеры таких многообразий?

9.

Опишите основные операции в тензорной алгебре, такие как сложение, умножение и контракция тензоров. Приведите примеры для каждой операции, чтобы проиллюстрировать их применение.

10.

Объясните, что такое тензорное поле на многообразии и как оно связано с понятиями гладкости и дифференцируемости. Приведите пример тензорного поля на двумерной сфере.

11.

Опишите основные концепции Римановой геометрии, включая метрику Римана, кривизну и геодезические линии. Как эти понятия взаимосвязаны и как они применяются в общей теории относительности?

### Задачи на соответствие:

1.

**Задача:** Соотнесите типы касания с их определениями:

#### Определение

1. Кривые пересекаются и имеют одинаковые производные
2. Кривые имеют одинаковые координаты в точке касания
3. Кривые касаются, но не пересекаются
4. Кривые имеют разные производные в точке касания

#### Тип касания

- A. Точка касания
- B. Простое касание
- C. Двойное касание
- D. Не касаются

2.

**Задача:** Соотнесите формулы с их значениями:

#### Формула

1.  $\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

2.  $\kappa = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

3.  $\frac{d^2y}{dx^2}$

4.  $\frac{dy}{dx}$

#### Значение

A. Кривизна кривой

B. Кривизна параметрической кривой

C. Вторая производная

D. Первая производная

3.

**Задача:** Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	A. Измеряет, насколько кривая "выкручивается" в пространстве.
2. Кручение	B. Мера изменения направления касательной к кривой.
3. Пространственная кривая	C. Кривая, заданная в трехмерном пространстве.
4. Длина дуги	D. Длина отрезка кривой между двумя точками.

4.

**Задача:** Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
A. Гладкая кривая	1. Кривая, для которой существует непрерывная производная.
B. Длина кривой	2. Интеграл от нормы производной по заданному интервалу.
C. Касательный вектор	3. Вектор, описывающий направление и скорость движения по кривой.
D. Параметризация	4. Представление кривой в виде функции от одного параметра.

5.

**Задача:** Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Кривая, у которой производная не равна нулю	A. Регулярная кривая
2. Изменение направления касательной к кривой	B. Кривизна
3. Кривая, которая может быть описана в виде $\gamma(t) = (x(t), y(t))$	C. Параметрическая кривая
4. Параметризация кривой в окрестности точки	D. Локальная параметризация

6.

**Задача:** Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Кривизна	A. Параметр, описывающий изменение направления касательной
2. Длина плоской кривой	B. Интеграл, вычисляемый по параметрическому уравнению
3. Радиус кривизны	C. Обратная величина кривизны
4. Гладкая кривая	D. Кривая, которая имеет непрерывные производные до второго порядка

7.

**Задача:** Соотнесите уравнения касательных плоскостей с соответствующими поверхностями:

Уравнение касательной плоскости	Поверхность
1. $z = 2x + 3y - 1$	A. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x - y + 1$	B. $z = x^3 + y^3$
3. $z = 0$	C. $z = 3xy$
4. $z = 2x - y + 3$	D. $z = \sin(x) + \cos(y)$

8.

**Задача:** Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Множество точек, которое локально напоминает евклидово пространство	A. Дифференцируемое многообразие
2. Линейное пространство, ассоциированное с точкой многообразия	B. Касательное пространство
3. Непрерывное отображение между многообразиями	C. Гладкое отображение
4. Отображение, которое сохраняет структуру многообразия	D. Гомеоморфизм

9.

Определение	Термин
1. Математическая структура, обобщающая векторы и матрицы	A. Тензор
2. Операция, которая сочетает два тензора и дает новый тензор	B. Тензорное произведение
3. Специальный случай тензора, имеющий порядок 1	C. Вектор
4. Свойство, позволяющее тензорам изменять свои компоненты при изменении базиса	D. Тензорная трансформация

10.

Определение	Термин
1. Функция, которая приписывает каждому пункту многообразия тензор	A. Тензорное поле
2. Многообразие, на котором определены координаты	B. Координатное многообразие
3. Локальная структура, описывающая свойства многообразия	C. Атлас
4. Объект, который позволяет определять производные тензоров	D. Связность

11.

Определение	Термин
1. Геометрия, изучающая кривизну многообразий	A. Риманова геометрия
2. Метод, позволяющий измерять расстояния на многообразии	B. Метрика
3. Объект, описывающий кривизну многообразия	C. Тензор кривизны
4. Специальный случай римановой метрики, где кривизна постоянна	D. Гиперболическая геометрия

### Критерии оценки:

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «**не зачтено**»

Решение неверное или отсутствует

Составитель



Гаиров Д.С.