

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
«28» августа 2024 г.
Заведующий кафедрой
математики и физики


Гулбоев Б.Дж.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Избранные главы функционального анализа»
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»
Форма подготовки - очная
Уровень подготовки - магистратура

Душанбе – 2024

**ПАСПОРТ
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы*	Формируемые компетенции*	Индикаторы достижения компетенции*	Оценочные средства*	
				Количество тестовых заданий/вопросов к экзамену/зачету /зачету (с оценкой)	Другие оценочные средства Вид
1.	Основные структуры функционального анализа	УК-1	ИУК 1.1. Выявляет проблемную ситуацию, на основе системного подхода осуществляет её многофакторный анализ и диагностику.	5	Перечень вопросов для устного опроса
2.	Топологические пространства	ПК-3	ИПК-3.1. Применяет методологические приемы для представления научных знаний.	5	Перечень вопросов для устного опроса
3.	Компактность в топологических и метрических пространствах	ПК-3	ИПК-3.2. Осуществляет обработку полученных результатов, анализирует и осмысливает их с учетом имеющихся литературных данных, а также ведет библиографическую работу, используя современные информационные технологии..	5	Перечень вопросов для устного опроса
4.	Конструкция пространств Лебега	УК-1	ИУК 1.2. Осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов	5	Перечень вопросов для устного опроса

			стратегических решений в проблемной ситуации.		
5.	Нормированные и банаховы алгебры	УК-1	ИУК 1.3. Предлагает и обосновывает стратегию действий с учетом ограничений, рисков и возможных последствий	5	Перечень вопросов для устного опроса
6.	Вполне непрерывные операторы	ПК-3	ИПК-3.3. Осваивает методы построения математических моделей реальных объектов и разрабатывает на их основе практические рекомендации	5	Перечень вопросов для устного опроса
7.	Спектральная теория вполне непрерывных операторов	ПК-3	ИПК-3.1. Применяет методологические приемы для представления научных знаний.	5	Перечень вопросов для устного опроса
Всего:				36	

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА
по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

1. Метрические и предметрические пространства
2. Нормированные и преднормированные пространства
3. Пространства со скалярным произведением и взаимосвязь между данными типами пространств
4. Сравнение топологий
5. Индуцированная топология
6. Замыкание
7. Отделимость
8. Полнота метрического пространства
9. Базы и предбазы топологии
10. Сходимость в топологических пространствах
11. Свойства компактов
12. Связь с аксиомами отделимости

13. Характеризация компактов в метрических пространствах
14. Критерии компактности в конкретных нормированных пространствах
15. Прямые суммы и пересечения подпространств преднормированного пространства
16. Факторпространство по подпространству преднормированного пространства
17. Критерий нормируемости факторпространства
18. Иллюстрация общей конструкции построения факторпространства в случае пространств Лебега
19. Кольца и их основные свойства
20. Нормированные и банаховы алгебры
21. Инволютивные
22. Звёздные и C^* -алгебры
23. Примеры классических банаховых алгебр
24. Идеалы и факторалгебры банаховых алгебр
25. Начала спектральной теории для коммутативных банаховых алгебр
26. Вполне непрерывные операторы и их свойства
27. Три теоремы Фредгольма
28. Случай конечномерного оператора
29. Спектральная теория вполне непрерывных операторов.

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их

смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА

по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

1.

Задача: Является ли множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ векторным пространством?

- А) Да
- В) Нет

2.

Задача: Какое из следующих свойств является необходимым для того, чтобы оператор $T : X \rightarrow Y$ был непрерывным, если X и Y — нормированные пространства?

- А) Существование обратного оператора
- В) Существование константы C , такой что $\|Tx\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in X$
- С) Линейность оператора
- D) Все вышеперечисленные

3.

Задача: Если $T : X \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор, то его операторная норма определяется как:

- А) $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$
- В) $\|T\| = \inf_{\|x\| \geq 1} \|Tx\|$
- С) $\|T\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|$
- D) $\|T\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$

4.

Задача: Является ли множество \mathbb{R}^n с обычной топологией (топология, порожденная евклидовой метрикой) топологическим пространством?

- А) Да
- В) Нет

5.

Задача: Какое из следующих свойств является необходимым для того, чтобы множество U было открытым в топологическом пространстве X ?

- A) Для любого $x \in U$ существует окрестность V такая, что $V \subset U$
- B) U является пустым множеством
- C) U является замкнутым множеством
- D) Все вышеперечисленные

6.

Задача: Если X — топологическое пространство, а $A \subseteq X$, то замыкание \bar{A} является:

- A) Открытым множеством
- B) Замкнутым множеством
- C) Пустым множеством
- D) Никаким из перечисленных

7.

Задача: Является ли множество $[0, 1]$ компактным в стандартной топологии на \mathbb{R} ?

- A) Да
- B) Нет

8.

Задача: Какое из следующих множеств является компактным в \mathbb{R}^2 ?

- A) Открытый круг радиуса 1
- B) Замкнутый квадрат со сторонами 1
- C) Полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

9.

Задача: Если X — компактное пространство и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то:

- A) f достигает максимума на X
- B) f не достигает максимума на X

10.

Задача: Какое из следующих свойств характерно для пространств Лебега?

- A) Полнота
- B) Ограниченность
- C) Линейная независимость
- D) Дискретность

11.

Задача: Если f — измеримая функция на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^n$, и $\int_E |f| dx < \infty$, то f принадлежит какому пространству?

- A) $L^1(E)$
- B) $L^2(E)$
- C) $L^\infty(E)$
- D) $C(E)$

12.

Задача: Является ли пространство $L^2([0, 1])$ банаховым пространством?

- A) Да
- B) Нет

13.

Задача: Является ли множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ банаховой алгеброй?

- A) Да
- B) Нет

15.

Задача: Если A и B — это элементы банаховой алгебры, то их произведение AB также принадлежит этой алгебре?

- A) Да
- B) Нет

16.

Задача: Какова норма оператора $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, заданного как $(Tf)(x) = 2f(x)$?

- A) 1
- B) 2
- C) 0
- D) Бесконечность

17.

Задача: Является ли оператор $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, заданный как $(Tf)(x) = xf(x)$, вполне непрерывным?

- A) Да
- B) Нет

18.

Задача: Какое из следующих свойств является характеристикой вполне непрерывного оператора?

- А) Существование собственных значений
- В) Компактность
- С) Линейность
- D) Непрерывность

19.

Задача: Если оператор T является вполне непрерывным, то его спектр состоит из:

- А) Только нуля
- В) Конечного числа точек
- С) Конечного числа точек и нуля
- D) Бесконечного числа точек

20.

Задача: Какое из следующих утверждений о вполне непрерывных операторах верно?

- a) Вполне непрерывные операторы всегда являются компактными.
- b) Вполне непрерывные операторы не могут иметь собственные значения.
- c) Вполне непрерывные операторы всегда имеют непрерывный спектр.

21.

Задача: Если T — вполне непрерывный оператор на банаховом пространстве, то его спектр $\sigma(T)$ является:

- a) Ограниченным.
- b) Неограниченным.
- c) Множество всех комплексных чисел.

22.

Задача: Какое из следующих свойств является характерным для спектра компактного оператора?

- a) Спектр всегда содержит ноль.
- b) Спектр состоит только из конечного числа точек.
- c) Спектр может содержать только предельные точки.

Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «хорошо», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «удовлетворительно», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «неудовлетворительно», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА И ЗАДАЧИ НА СООТВЕТСТВИЕ

по дисциплине «Избранные главы функционального анализа»

Задачи открытого типа:

1.

Задача: Объясните, что такое банахово пространство и приведите несколько примеров. Каковы основные свойства таких пространств?

2.

Задача: Опишите основные свойства топологических пространств. Каковы критерии для того, чтобы множество было открытым или замкнутым?

3.

Задача: Объясните, что такое компактное пространство в топологии. Приведите примеры и не примеры компактных пространств.

4.

Задача: Объясните, каковы основные шаги в конструкции пространства Лебега. Как они отличаются от конструкции пространства Римана?

5.

Задача: Объясните, что такое банахова алгебра и приведите примеры таких алгебр. Каковы основные свойства банаховых алгебр, которые отличают их от обычных алгебр?

6.

Задача: Опишите основные свойства вполне непрерывных операторов. Каковы условия, при которых оператор можно считать вполне непрерывным?

7.

Задача: Опишите основные свойства вполне непрерывных операторов. Как эти свойства влияют на структуру их спектра?

Задачи на соответствие:

1.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Линейный оператор	A. Пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится
2. Нормированное пространство	B. Отображение, сохраняющее операции сложения и умножения на скаляр
3. Банахово пространство	C. Пространство с нормой, удовлетворяющей определенным условиям
4. Компактный оператор	D. Оператор, который переводит ограниченные подмножества в относительно компактные подмножества

2.

Задача: Соотнесите термины с их определениями:

Термин	Определение
1. Топологическое пространство	A. Множество, которое не может быть представлено как объединение двух непустых открытых множеств
2. Открытое множество	B. Семейство подмножеств, удовлетворяющее аксиомам топологии
3. Замкнутое множество	C. Множество, содержащее все свои предельные точки
4. Связное пространство	D. Множество, в котором для каждой точки существует окрестность, полностью лежащая в этом множестве

3.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Пространство, в котором каждая открытая покрывающая имеет конечное подпокрытие
2. Множество, в котором каждая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность
3. Топологическое пространство, в котором каждая открытая последовательность является открытой
4. отображение, сохраняющее топологическую структуру между двумя пространствами

Термин

- A. Компактное пространство
- B. Секвенциальная компактность
- C. Гомеоморфизм
- D. Непрерывное отображение

4.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Функция, которая является измеримой и интегрируема по Лебегу
2. Множество всех измеримых функций, для которых интеграл конечен
3. Мера, которая присваивает ноль множествам меры нуля
4. Нормированное пространство, состоящее из классов эквивалентности функций

Термин

- A. Измеримая функция
- B. Пространство L^1
- C. Мера Лебега
- D. Пространство L^p

5.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение

1. Алгебра, в которой операция умножения является ассоциативной и коммутативной
2. Пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится
3. Алгебра, где определена норма и выполняются условия для банаховой алгебры
4. Алгебра, в которой существуют единичный элемент и обратные элементы

Термин

- A. Нормированная алгебра
- B. Банахова алгебра
- C. Нормированная алгебра
- D. Алгебра с единицей

6.

Задача: Соотнесите определения с терминами:

Определение	Термин
1. Оператор, который сохраняет компактность при ограниченных последовательностях	A. Вполне непрерывный оператор
2. Множество всех собственных значений оператора	B. Спектр
3. Оператор, который является ограниченным и компактным	C. Компактный оператор
4. Значение, при котором оператор не имеет собственных векторов	D. Нуль собственное значение

7.

Задача: Соотнесите свойства с терминами:

Свойство	Термин
1. Спектр состоит из собственных значений и нуля.	A. Вполне непрерывный оператор
2. Спектр является замкнутым множеством.	B. Компактный оператор
3. Оператор имеет конечное число собственных значений.	C. Непрерывный оператор
4. Существует предельная точка спектра.	D. Оператор с непрерывным спектром

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Составитель:  Каримов О.Х.